CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PSI

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

Obtention de piles successifs lors de lancers d'une pièce.

Dans ce sujet, nous étudions la probabilité d'apparition de n côtés pile successifs lors du lancer d'une pièce. Ce type de problème a notamment servi de modèle pour des études effectuées dans les années 2010 visant à améliorer la performance des transmissions d'informations dans certains types de réseaux informatiques sans fil appelé OLSR [1]. Ces derniers ont des applications dans l'utilisation des mini-drones de reconnaissance, ou bien lors de communications d'unités de secours pour la prévention des catastrophes naturelles.

Dans les trois premières parties, nous étudions la probabilité d'apparition pour la première fois de n côtés pile successifs lors de lancers d'une pièce. La première partie s'intéresse aux cas où $n = 1$ et $n = 2$; la deuxième au cas où $n = 3$. Puis le cas général est étudié dans la troisième partie. La dernière partie, quant à elle, traite du problème de l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs lorsqu'une pièce est lancée k fois.

Notations et définition

On dispose d'une pièce non nécessairement équilibrée. On note $p \in]0,1[$ la probabilité que le résultat d'un lancer donne le côté pile et $q \in]0,1[$ celle qu'il soit face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire X_n de sorte que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, X_n prend la valeur k lorsque l'on obtient pour la première fois n côtés piles consécutifs à la suite de k lancers d'une pièce et $X_n = +\infty$ si cet événement ne se produit jamais. On admet dans tout le sujet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) sur lequel est définie X_n. On note f la fonction définie par, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = t^n - q\sum_{i=1}^{n} p^{i-1}t^{n-i}$ et $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle de tout nombre complexe z.

A – Les cas où $n = 1$ et $n = 2$

I – Le cas où $n = 1$

Q1. Donner explicitement la loi de X_1.

Q2. Donner directement la fonction génératrice de X_1, son espérance et sa variance.

Q3. Démontrer les résultats donnés dans la question 2.

II – Le cas où $n = 2$

Q4. Déterminer $P(X_2 = 1)$ et $P(X_2 = 2)$.

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. On suppose que X_2 prend la valeur k. Déterminer l'ensemble des résultats possibles pour les deux premiers lancers.

Q6. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, $P(X_2 = k) = qP(X_2 = k-1) + pqP(X_2 = k-2)$.

Q7. Montrer que le trinôme $X^2 - qX - pq$ admet deux racines r_1 et r_2 dans $]-1,1[$ vérifiant $r_2 < r_1$ et $|r_2| < |r_1|$.

Q8. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum_{k=2}^{+\infty}(r_1^{k-1} - r_2^{k-1})z^k$.

Q9. Exprimer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$.

Q10. Déterminer l'événement $(X_2 = +\infty)$ en fonction des événements $(X_2 \geqslant k)$, où $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $P(X_2 = +\infty) = 0$.

Q11. Montrer que la fonction génératrice de X_2, notée G_{X_2}, est telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $G_{X_2}(z) = \dfrac{p^2z^2}{1-qz-pqz^2}$.

Q12. Montrer que X_2 admet une espérance et une variance.

Q13. Calculer l'espérance de X_2 puis montrer que sa variance vaut $\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{1}{p}$.

B – Le cas où $n = 3$

On s'intéresse dans cette partie au cas où $n = 3$.

I – Étude générale à l'aide de l'algèbre linéaire

Q14. Donner pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $P(X_3 = k)$.

Q15. Montrer à l'aide d'un système complet d'événements adéquat que pour tout $k > 3$,

$$P(X_3 = k) = qP(X_3 = k-1) + pqP(X_3 = k-2) + qp^2P(X_3 = k-3).$$

Q16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose la matrice colonne $U_k = \begin{pmatrix} P(X_3 = k+2) \\ P(X_3 = k+1) \\ P(X_3 = k) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = MU_k$.

Q17. Déterminer le polynôme caractéristique noté χ_M de M.

Q18. Montrer que χ_M admet une unique racine dans $]0,1[$.

Q19. Vérifier que $(X-p)\chi_M(X) = X^4 - X^3 + qp^3$ puis montrer que χ_M admet une seule racine réelle.

Q20. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Q21. On note $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ et $D \in M_3(\mathbb{C})$ une matrice diagonale d'ordre 3 telles que $M = QDQ^{-1}$. Sans calculer Q, montrer qu'il existe $(A,B,C) \in \mathbb{C}^3$, $\lambda_1 \in]0,1[$ et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$P(X_3 = k) = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Q22. Déterminer uniquement la valeur de A en fonction de λ_1 et λ_2.

Q23. On note θ un argument de λ_2 et r son module. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_3 = k) = a\lambda_1^{k-1} + br^{k-1}\cos((k-1)\theta) + cr^{k-1}\sin((k-1)\theta)$

Q24. Montrer que : $q < \lambda_1$, $\mathcal{R}e(\lambda_2) < 0$, $|\lambda_2 - 1| > 1$ puis que $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Q25. En déduire l'existence d'un réel $m > 0$, que l'on calculera en fonction de λ_1 et λ_2, tel que $P(X_3 = k) \underset{k\to+\infty}{\sim} m\lambda_1^k$.

II – Un cas particulier

Dans cette partie B.II, on suppose que $p = 3/4$.

Q26. Déterminer dans $\mathbb{N}$ une racine du polynôme $\chi_M(\frac{X}{4})$.

Q27. En déduire toutes les racines de χ_M.

Q28. Déterminer un équivalent de $P(X_3 = k)$.

C – L'étude générale par le calcul de la fonction génératrice

On s'intéresse au cas où apparaît pour la première fois une succession de n côtés pile lors du lancer d'une pièce, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q29. Quelles sont les valeurs de $P(X_n = k)$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q30. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(X_n = k) = qP(X_n = k-1) + qpP(X_n = k-2) + \cdots + qp^{n-1}P(X_n = k-n).$$

Q31. On rappelle que la fonction f a été définie dans l'introduction du sujet. Calculer $f(1)$ puis montrer qu'il existe $t \in]p,1[$ tel que $f(t) \geqslant 0$. On considère dans la suite de cette partie C un tel réel t.

Q32. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k) \leqslant t^k$.

Q33. Montrer que la fonction génératrice de X_n, notée G_{X_n}, est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{t}$ et que $G_{X_n}(z) = \dfrac{p^n z^n (1-pz)}{qp^n z^{n+1} - z + 1}$.

Q34. Montrer que X_n admet une espérance et calculer $E(X_n)$.

Q35. On admet qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n nombres complexes de module strictement supérieur à 1 et deux à deux distincts et $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que pour tout z tel que $|z| < \dfrac{1}{t}$, $G_{X_n}(z) = a + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{z - \lambda_i}$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = k)$ en fonction des nombres a_i et λ_i.

D – Obtenir une succession de pile à la suite de lancers d'une pièce

Dans cette partie, on effectue des lancers successifs de la même pièce, on rappelle que la probabilité d'obtenir le côté pile est $p \in]0,1[$. Au bout de $k \in \mathbb{N}^*$ lancers, on s'intéresse à l'apparition d'une succession d'au moins n côtés pile consécutifs. Par exemple, on lance 100 fois la pièce et on regarde si la série de cinq côtés pile : "pile,pile,pile,pile,pile" est apparue dans ces 100 lancers, mais il n'est pas interdit d'avoir une série de plus de cinq piles côte à côte. On note $A_{n,k}$ l'événement : " avoir une succession d'au moins n côtés pile au bout de k lancers de la pièce". On admettra que pour tout $(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad u_i = b_i \quad \text{et} \quad \forall k > n, \quad u_k = qu_{k-1} + qpu_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}u_{k-n} \quad (\star).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q36. Quelles sont les valeurs de $P(A_{n,k})$, où $k \in \{1, \cdots, n\}$?

Q37. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > n$,

$$P(A_{n,k}) = p^n + qP(A_{n,k-1}) + qpP(A_{n,k-2}) + \cdots + qp^{n-1}P(A_{n,k-n}).$$

Q38. Écrire une fonction Python ayant comme variables d'entrée p, k et n et qui donne en sortie la liste des $P(A_{n,l})$ pour $l \in \{1, \cdots, k\}$.

Q39. Déterminer une suite constante $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k > n, v_k = p^n + qv_{k-1} + qpv_{k-2} + \cdots + qp^{n-1}v_{k-n}.$$

Q40. Déterminer $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que la suite (u_k) vérifiant la condition $(\star)$ est telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - u_k$.

Q41. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n$, $0 < u_k < 1$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q42. On pose $M = max\left\{\dfrac{u_{i+1}}{u_i} ; i \in \{n, \cdots, 2n-1\}\right\}$. En utilisant la fonction f définie en introduction puis en raisonnant par récurrence d'ordre n à partir du rang $n+1$, montrer qu'il existe $\alpha \in [M,1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant n+1$, $u_k \leqslant \alpha^{k-n}$.

Q43. Déterminer $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n,k}\right)$ puis justifier l'affirmation : lorsque l'on effectue une succession de lancers d'une pièc presque sûrement on obtiendra à un moment une série d'au moins 10000 côtés pile consécutifs.

Q44. On suppose dans cette question $n = 5$ et $p = 1/2$. On admet que l'on peut prendre $\alpha = 0{,}9827$ et que l'on $0{,}9827^{95} \leqslant 0.193$. Justifier l'affirmation suivante : on lance 100 fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obteni au moins cinq cotés pile consécutifs est au moins de 0,8.

Q45. En s'inspirant de la méthode de la partie B, proposer une démarche expliquée en quelques étapes et sans fair les calculs et qui permettrait de montrer l'existence de $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ avec pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|\mu_i| < 1$ et de $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n,k}) = 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^k$.

Références

[1] Evgeny KHOROV et al. « Analytical study of neighborhood discovery and link management in OLSR ». In : *2012 IFIP Wireless Days*. 2012, p. 1-6. DOI : 10.1109/WD.2012.6402849.

◇ Fin ◇