



Sur quelques sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

Dans tout le sujet, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} , I_n sa matrice identité.
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. définies positives).
- $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $SO_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales de déterminant 1.
- La transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera notée M^T et sa trace $\text{tr } M$.
- On note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X , en convenant que $|X| = +\infty$ si X est un ensemble infini.
- Si \mathcal{A} est une partie finie d'un groupe G , on note $\langle \mathcal{A} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par \mathcal{A} .

Le problème comporte trois parties indépendantes.

Partie A – Sous-groupes finis de $O_n(\mathbb{R})$

Soit G un groupe de neutre e . On dit que G est d'exposant fini si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in G \quad x^m = e$$

De plus, si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, on note $\text{tr } G$ la trace du groupe G , qui est l'ensemble :

$$\text{tr } G = \{\text{tr } A ; A \in G\}$$

I – Généralités

Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

- Q1. Montrer que si G est fini, alors G est d'exposant fini et $\text{tr } G$ est fini.
- Q2. Donner un exemple de sous-groupe infini de $GL_n(\mathbb{R})$ dont la trace soit finie.
- Q3. Donner un exemple (pas nécessairement matriciel) de groupe infini qui soit d'exposant fini.

II – Cas particulier : les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note R_θ et S_θ les matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On pourra utiliser sans démonstration les relations suivantes, valables pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$:

$$R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} \quad R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi} \quad S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta} \quad S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$$

- Q4. Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = R_\theta$.

Q5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans cette question, $G = \langle R_\theta \rangle$.

- a) Vérifier que $G = \{R_{k\theta} ; k \in \mathbb{Z}\}$.
- b) Dans le cas où $\theta = \frac{2\pi}{m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer $|G|$.
- c) Montrer que G est fini si et seulement si $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
- d) Montrer que si G est d'exposant fini, alors G est fini.
- e) Montrer que si $\text{tr } G$ est fini, alors G est fini.

Q6. Soient θ et θ' deux réels. Dans cette question $G = \langle R_\theta, R_{\theta'} \rangle$.

- a) Montrer que $|G| = |(\theta\mathbb{Z} + \theta'\mathbb{Z}) \cap [0, 2\pi[|$.
- b) En déduire, pour p et q deux entiers non nuls premiers entre eux, que $|\langle R_{\frac{\pi}{p}}, R_{\frac{\pi}{q}} \rangle| = 2pq$.
- c) Déterminer $|\langle R_{\frac{\pi}{p}}, R_{\frac{\pi}{q}} \rangle|$ dans le cas général (où p et q ne sont pas forcément premiers entre eux).

Q7. Soit G un sous-groupe fini de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer que G est monogène.

Q8. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{D}_m le sous-groupe de $\text{O}_2(\mathbb{R})$ engendré par $R_{\frac{2\pi}{m}}$ et $S_{\frac{\pi}{2}}$.

- a) Déterminer le cardinal de \mathcal{D}_m .
On pourra montrer que $\mathcal{D}_m \cap \text{SO}_2(\mathbb{R}) = \langle R_{\frac{2\pi}{m}} \rangle$, puis chercher une bijection entre $\mathcal{D}_m \cap \text{SO}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_m \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$.
- b) Soit G un sous-groupe fini de $\text{O}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas inclus dans $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à \mathcal{D}_m .

III – Une caractérisation des sous-groupes finis de $\text{O}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, G est un sous-groupe de $\text{O}_n(\mathbb{R})$. On désire montrer que :

$$G \text{ fini} \iff G \text{ d'exposant fini} \iff \text{tr } G \text{ fini}$$

Q9. Rappeler le théorème de réduction des matrices orthogonales.

Q10. On suppose dans cette question que G est d'exposant fini. Montrer, en utilisant le théorème de réduction précédent, que $\text{tr } G$ est fini.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose maintenant que $\text{tr } G$ est fini. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel :

$$(A|B) = \text{tr } A^T B$$

On note \mathcal{F} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par G et $d = \dim \mathcal{F}$.

Q11. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{B} = (A_i)_{i \in [1, d]}$ de matrices de G qui forme une base de \mathcal{F} .

Q12. Soit $B = ((A_i|A_j))_{(i,j) \in [1, d]^2}$. On considère la matrice C des coordonnées des matrices A_i dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Quelle est la taille de la matrice C ?
- b) Montrer que $B = C^T C$.
- c) Montrer que B et C sont de même rang. En déduire que B est inversible.

Q13. Soit $M \in G$. On peut décomposer M dans la base \mathcal{B} :

$$M = \sum_{j=1}^d x_j A_j$$

On note alors $X_M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ et $Y_M = \begin{pmatrix} (A_1|M) \\ \vdots \\ (A_d|M) \end{pmatrix}$. Montrer que $X_M = B^{-1} Y_M$.

Q14. Montrer que $\{Y_M \mid M \in G\}$ est un ensemble fini. En déduire que G est fini.

Partie B – Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille $n \times 1$ à coefficients dans \mathbb{R} .

Dans cette partie, on se place dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$. Pour $r \geq 0$, on note $\mathcal{B}(0, r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour cette norme, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0, 1)$ la boule unité fermée.

I – Quelques propriétés utiles

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q15. On pose, pour X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle_A = (AX|Y)$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note alors $\|\cdot\|_A$ la norme associée à ce produit scalaire et \mathcal{B}_A la boule unité fermée pour cette norme. Existe-t-il une matrice A telle que $\mathcal{B}(0, r) = \mathcal{B}_A$?

Q16. Vérifier que $X \mapsto A^{-1}BX$ est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Que peut-on en déduire pour la matrice $A^{-1}B$?

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $B \preccurlyeq A$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(BX|X) \leq (AX|X)$.

Q17. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Q18. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si le spectre de $A^{-1}B$ est inclus dans $]0, 1]$.
Pour la réciproque, on pourra utiliser une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ bien choisie.

Q19. On suppose toujours que A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et que $B \preccurlyeq A$. Montrer que $\det B \leq \det A$, avec égalité si et seulement si $A = B$.

Q20. Montrer que $B \preccurlyeq A$ si et seulement si $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{B}_B$.

Q21. Soit \mathcal{K} une partie de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{K} est une partie bornée de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $A \in \mathcal{K}$, $A \preccurlyeq \alpha I_n$.

II – Stricte log-concavité de l'application \det

Soit \mathcal{C} une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est *strictement concave* si et seulement si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \varphi(tA + (1-t)B) \geq t\varphi(A) + (1-t)\varphi(B)$$

avec égalité si et seulement si $A = B$ ou $t = 0$ ou $t = 1$.

Q22. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q23. Montrer que $\varphi : A \mapsto \ln(\det A)$ est une fonction strictement concave sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser le résultat de la question Q16.

III – Groupe orthogonal associé à une matrice symétrique définie positive

À toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on associe son *groupe orthogonal* :

$$\mathcal{O}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; M^T A M = A\}$$

Q24. Montrer que $\mathcal{O}(A)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On pourra montrer qu'il existe une matrice B telle que $A = B^T B$, et chercher un isomorphisme sous la forme $M \mapsto B^{-1}MB$.

Q25. Montrer que $\mathcal{O}(A)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV – Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, G désigne un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On désire montrer que G est alors isomorphe à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Q26. Montrer que pour tout $M \in G$, $|\det M| = 1$.

Q27. On pose :

$$C = \{MX ; (M, X) \in G \times B\}$$

Montrer que C est compact, et que 0 est un point intérieur à C .

Q28. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C \subset \mathcal{B}_A$ et qui soit de déterminant maximal.

On pourra commencer par montrer que $\mathcal{E} = \{A \in S_n^+(\mathbb{R}) ; C \subset \mathcal{B}_A\}$ est non vide, compact et convexe, puis utiliser la question Q23 pour démontrer l'unicité.

Q29. Montrer que G est un sous-groupe de $O(A)$.

Partie C – Croissance du groupe de Heisenberg discret

I – Croissance d'un groupe

Soit G un groupe de neutre e , engendré par une partie finie $S = \{s_i\}_{i \in [1, N]}$. À tout élément $g \in G - \{e\}$ on associe sa longueur relativement à S par :

$$\ell_S(g) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k |a_i| \mid g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k} ; s_i \in S, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\ell_S(g)$ est le nombre minimal d'éléments de S permettant d'obtenir g . Par convention, on pose $\ell_S(e) = 0$. On note alors, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{V}_S(p) = \{g \in G ; \ell_S(g) \leq p\}$$

$\mathcal{V}_S(p)$ est l'ensemble des éléments de G s'obtenant à partir d'au maximum p éléments de S .

Nous dirons que G est un groupe à croissance polynomiale de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $p \geq 1$:

$$\alpha p^d \leq |\mathcal{V}_S(p)| \leq \beta p^d$$

Q30. Montrer que pour tous g et h dans G , $\ell_S(g^{-1}) = \ell_S(g)$ et $\ell_S(gh) \leq \ell_S(g) + \ell_S(h)$.

Q31. Soit Σ une autre partie finie génératrice de G . Montrer qu'il existe deux constantes C et C' strictement positives telle que, pour tout $g \in G$:

$$C \ell_S(g) \leq \ell_\Sigma(g) \leq C' \ell_S(g)$$

En déduire que le fait que G soit un groupe à croissance polynomiale de degré d ne dépend pas du système S de générateurs choisis.

Q32. Soit $p \in \mathbb{N}$. Dénombrer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + y + z \leq p$. En déduire que $(\mathbb{Z}^3, +)$ est un groupe à croissance polynomiale et déterminer son degré.

II – Le groupe de Heisenberg discret

Dans cette partie, $n = 3$. On considère les trois matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{A} = \{S, T, U\}$. \mathbb{H} désigne alors le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{A} .

Q33. Pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$, calculer $S^i T^j U^k$.

Q34. Pour $(i, j, k, i', j', k') \in \mathbb{Z}^6$, déterminer un triplet $(i'', j'', k'') \in \mathbb{Z}^3$ tel que :

$$S^i T^j U^k S^{i'} T^{j'} U^{k'} = S^{i''} T^{j''} U^{k''}$$

Q35. Vérifier que U commute avec tous les éléments de \mathbb{H} , et que pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$S^i T^j U^{ij} = T^j S^i$$

Q36. Le groupe \mathbb{H} est-il commutatif? Quel est le groupe engendré par (S, T) ?

Q37. Montrer que l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \rightarrow & \mathbb{H} \\ (i, j, k) & \mapsto & S^i T^j U^k \end{array}$$

est bien définie et bijective. Est-ce un isomorphisme de groupe (en munissant \mathbb{Z}^3 de sa structure usuelle)? Peut-on munir \mathbb{Z}^3 d'une structure de groupe telle que f soit un isomorphisme?

Q38. Soit $M \in \mathbb{H}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\ell_{\mathcal{A}}(M) \leq p$, alors il existe $(i, j, k, z) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $M = S^i T^j U^{k+z}$ avec $|i| + |j| + |k| \leq p$ et $|z| \leq |ij|$. En déduire que $|\mathcal{V}_{\mathcal{A}}(p)| = O(p^4)$ quand p tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser les résultats de la question Q35.

Q39. Montrer que, pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$, si $|i| + |j| \leq p$ et $|k| \leq |ij|$, alors $\ell_{\mathcal{A}}(S^i T^j U^k) \leq p$.

Q40. Montrer que :

$$\text{card}\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3, i + j \leq p \text{ et } k \leq ij\} \geq \frac{p^3}{2} \sum_{i=0}^p \frac{i}{p} \left(1 - \frac{i}{p}\right)^2$$

et déterminer un équivalent de cette dernière quantité quand p tend vers $+\infty$.

Q41. En déduire que \mathbb{H} est un groupe à croissance polynomiale de degré 4.

◇ Fin ◇
