



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

### **PHYSIQUE - CHIMIE**

Durée : 4 heures

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de sept parties indépendantes.**

## Notre Terre : attractive, si chaleureuse et... magn(if)(ét)ique

La vie sur notre planète Terre est tributaire de certaines de ses caractéristiques comme sa température et d'autres paramètres climatiques, son champ de pesanteur, son champ magnétique, etc. En particulier, le champ de pesanteur intervient dans tous les mouvements au voisinage de la Terre. Par ailleurs, les ressources terrestres en eau, pétrole, minerais et matériaux de construction assurent notre existence dans de bonnes conditions.

Ce sujet s'intéresse à quelques caractéristiques physiques et chimiques de la Terre. Il est composé de sept parties indépendantes.

La **partie I** s'intéresse au champ de pesanteur terrestre (analogie avec l'électromagnétisme).

La **partie II** s'intéresse à l'énergie potentielle de pesanteur (mécanique).

La **partie III** s'intéresse à une mesure optique du champ de pesanteur (optique interférentielle).

La **partie IV** fait appel à la chimie et est constituée de sous-parties indépendantes : la **partie IV-1** étudie la composition du ciment et la **partie IV-2** fait appel aux propriétés des couples acidobasiques.

La **partie V** modélise la température au sein de la Terre (thermodynamique).

La **partie VI** modélise un bilan énergétique de la surface de la Terre.

La **partie VII** étudie le champ magnétique terrestre.

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  et avec la base sphérique  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\}$ , un point  $M$  est repéré par  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$  dans un référentiel d'origine  $O$ .

Pour une fonction  $f(r)$ , l'expression de l'opérateur gradient est  $\vec{\text{grad}} f(r) = \frac{df}{dr} \vec{u}_r$ .

Données utiles pour l'ensemble du sujet	
Rayon de la Terre supposée sphérique	$R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Constante d'attraction universelle	$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe sud-nord	$\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Capacité calorifique massique de la Terre	$C \approx 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Les résultats numériques peuvent être donnés avec un seul chiffre significatif. Pour faire du calcul approché, on pourra utiliser la courbe  $\log_{10}(x)$  donnée en annexe, ainsi que les valeurs des  $\log_{10}$  pour les données ci-dessus.

## Partie I - Champ gravitationnel et champ de pesanteur

- Q1.** Donner les expressions des champs gravitationnel  $\overline{G}(M)$  et électrostatique  $\overline{E}(M)$ , créés en un point  $M$ , respectivement par la masse ponctuelle  $m$  et par la charge ponctuelle  $q$ , chacune étant placée en  $O$ . En déduire les analogues gravitationnels de la charge  $q$  et de la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$ . En utilisant l'analogie, écrire l'énoncé du théorème de Gauss intégral relatif au champ gravitationnel  $\overline{G}(M)$  créé par une distribution volumique de masse  $\mu(P)$  contenue dans un volume  $V$  délimité par une surface  $S$ .

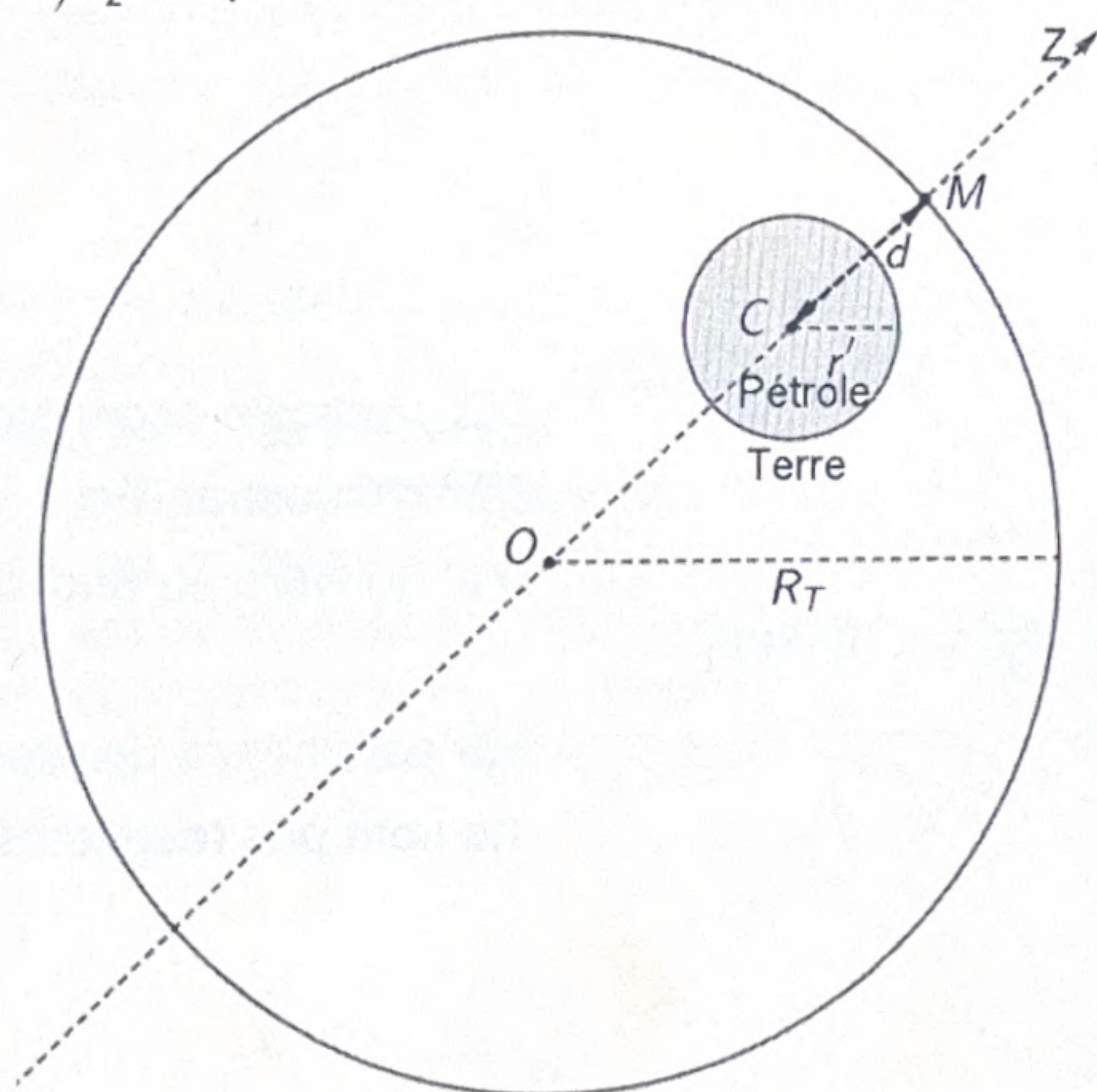
On suppose que la Terre est une sphère homogène de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse volumique uniforme  $\mu_T = 5400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

- Q2.** Exprimer le champ gravitationnel  $\overline{G}_T(M)$  créé par la Terre en tout point de l'espace.

Les variations du champ gravitationnel au voisinage du sol terrestre peuvent renseigner sur le contenu du sol. On s'intéresse à la modification du champ gravitationnel terrestre due à un gisement de pétrole, modélisé comme une sphère homogène de rayon  $r'$ , de centre  $C$  et de masse volumique égale à  $\mu_p = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On cherche la variation relative du champ gravitationnel introduite par le gisement de pétrole en un point  $M$  situé sur la verticale  $OCZ$  du point  $C$ , à la surface de la Terre, avec la distance  $CM$  égale à  $CM = d$  (**figure 1**).

On note  $\overline{G}_T(M) = G_T(M)\overline{u}_z$  le champ gravitationnel qui règnerait sur la Terre sans la poche de pétrole et  $\overline{G}_{Tp}(M) = G_{Tp}(M)\overline{u}_z$  en présence de la poche de pétrole.



**Figure 1** - Présence de pétrole dans le sol terrestre

- Q3.** En utilisant le principe de superposition, exprimer  $G_{Tp}(M)\overline{u}_z$  et la variation relative du champ gravitationnel  $\epsilon = \frac{G_T(M) - G_{Tp}(M)}{G_T(M)}$  en fonction de  $\mu_T$ ,  $\mu_p$ ,  $r'$ ,  $d$  et de  $R_T$ . En présence de pétrole, indiquer avec justification si le champ gravitationnel devient plus intense ou moins intense.

Faire une estimation numérique de  $\varepsilon$ , en prenant :  $\frac{r'}{d} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{r'}{R_T} = \frac{10^{-3}}{4}$  et  $\frac{\mu_P}{\mu_T} = \frac{1}{6}$ .  
 Commenter sachant que les gravimètres actuels ont une précision relative de l'ordre de  $10^{-8}$ .

## Partie II - Forme de la Terre

L'étude de certains mouvements peut se faire dans le référentiel géocentrique  $R(OXYZ)$  (figure 2), qui est supposé galiléen et dont l'origine est O, le centre de la Terre.  
 Le référentiel terrestre  $R'(O'X'Y'Z')$  (figure 2), lié à la Terre, effectue un mouvement de rotation uniforme, de vecteur  $\vec{\Omega}(R'/R) = \Omega \vec{u}_z$  par rapport au référentiel géocentrique où  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire de l'axe OZ.

Un point matériel M, de masse  $m$ , situé à la distance  $r = OM$  du centre de la Terre est soumis à l'attraction gravitationnelle et à d'autres forces. Le poids du mobile  $m\vec{g}$  est défini par

$$\vec{P} = m\vec{g}(M) = m \left( -GM_T \frac{\vec{u}_r}{r^2} + \Omega^2 \vec{HM} \right) \text{ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.}$$

- Q4. Justifier l'expression du champ de pesanteur  $\vec{g}(M)$  donnée ci-dessus en précisant quel est le terme gravitationnel et quel est le terme d'inertie. Donner l'ordre de grandeur de sa norme à la surface de la Terre.
- Q5. En général, la force de Coriolis peut être négligée devant le poids. Justifier cette approximation en prenant l'exemple d'un train TGV roulant à 360 km/heure, c'est-à-dire 100 m/s.

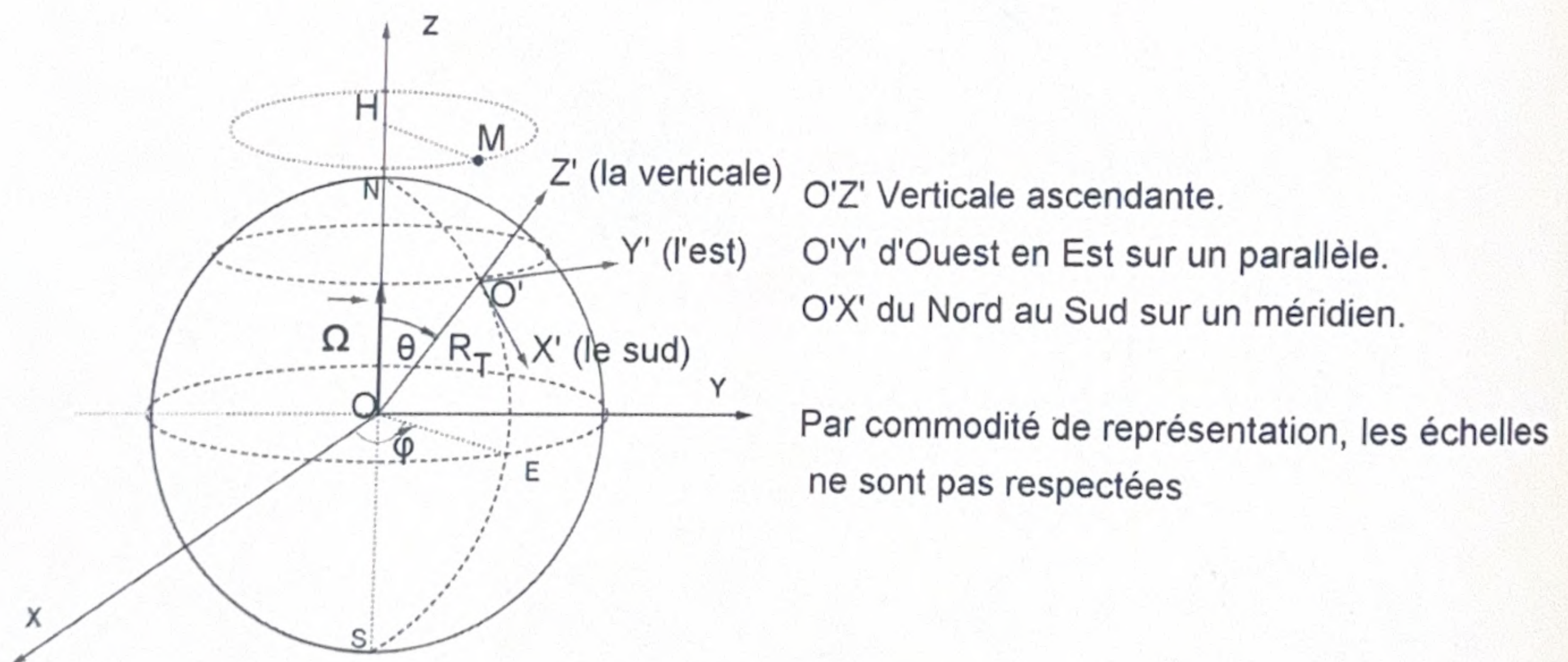


Figure 2 - Référentiel géocentrique et référentiel terrestre

- Q6. Montrer que le rapport des normes du terme d'inertie d'entraînement et du terme de gravitation à la surface de la Terre est majoré par une valeur  $\eta$  qu'on exprimera en fonction de  $\Omega$ ,  $R_T$ ,  $G$  et de  $M_T$ . Déterminer l'ordre de grandeur de la quantité  $\eta$  et commenter.

- Q7. a) La force gravitationnelle  $\vec{F}_G(M)$  dérive de l'énergie potentielle de gravitation  $E_{pG}(M)$ . Donner l'expression de celle-ci pour une masse  $m$  dans le champ de la Terre, en prenant une valeur nulle à l'infini.
- b) La force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_e$  dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement  $E_{pe}(M)$ . Établir que celle-ci s'écrit  $E_{pe}(M) = -\frac{1}{2}m\Omega^2(\overline{HM})^2$  pour une masse  $m$  dans le champ de la Terre, en prenant une valeur nulle en  $r = 0$ .
- c) En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(M)$  en coordonnées sphériques.

On appelle surface équipotentielle le lieu des points de même énergie potentielle de pesanteur et on se propose d'étudier la forme de l'équipotentielle  $(\Sigma)$  de valeur constante  $E_{pp}(M \in \Sigma) = E_{pp}(N)$  où N est le pôle Nord de la Terre repéré par  $ON = r_n$ .

- Q8. Montrer que, dans un plan méridien, la trace de cette surface équipotentielle  $(\Sigma)$  peut être décrite par la forme approchée  $r(\theta) \approx r_n(1 + \varepsilon \sin^2 \theta)$  et exprimer la constante  $\varepsilon$  en fonction de  $R_T$ ,  $r_n$  et de  $\eta$ . Dessiner l'allure de  $r(\theta)$  et exprimer le paramètre d'aplatissement  $\varepsilon' = \frac{r_e - r_n}{r_n}$  sachant que  $r$  vaut  $r_e$  dans tout le plan équatorial.

### Partie III - Détermination optique du champ de pesanteur

On se propose de mesurer la norme  $g$  du vecteur champ de pesanteur terrestre supposé uniforme, en utilisant une méthode optique basée sur l'interféromètre de Mach-Zehnder, dont le schéma de principe est représenté en **figure 3(a)**. La source laser est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,82 \text{ nm}$ .

En sortie de l'interféromètre, le détecteur P mesure l'intensité de l'interférence entre deux rayons cohérents. Lors des cheminements, les deux rayons, qui interfèrent, rencontrent des dispositifs optiques qui les réfléchissent et/ou les transmettent :  $C_1$ ,  $C_2$ , M,  $S_{p1}$ ,  $S_{p2}$  et  $S_{p3}$ . Pour les besoins de cette expérience, on utilise deux miroirs identiques particuliers, en "coins de cubes" :  $C_2$  fixe de coin  $O_2$  et  $C_1$  de coin  $O_1$  en translation verticale de chute libre. Chacune des trois lames séparatrices  $S_{p1}$ ,  $S_{p2}$  et  $S_{p3}$  est inclinée de  $45^\circ$  par rapport aux rayons laser incidents et chacune donne un rayon réfléchi et un rayon transmis. Le miroir M est incliné de  $45^\circ$  par rapport au rayon incident. L'ensemble est placé dans l'air d'indice optique  $n = 1$ . On ne tiendra pas compte de déphasages dus aux réflexions.

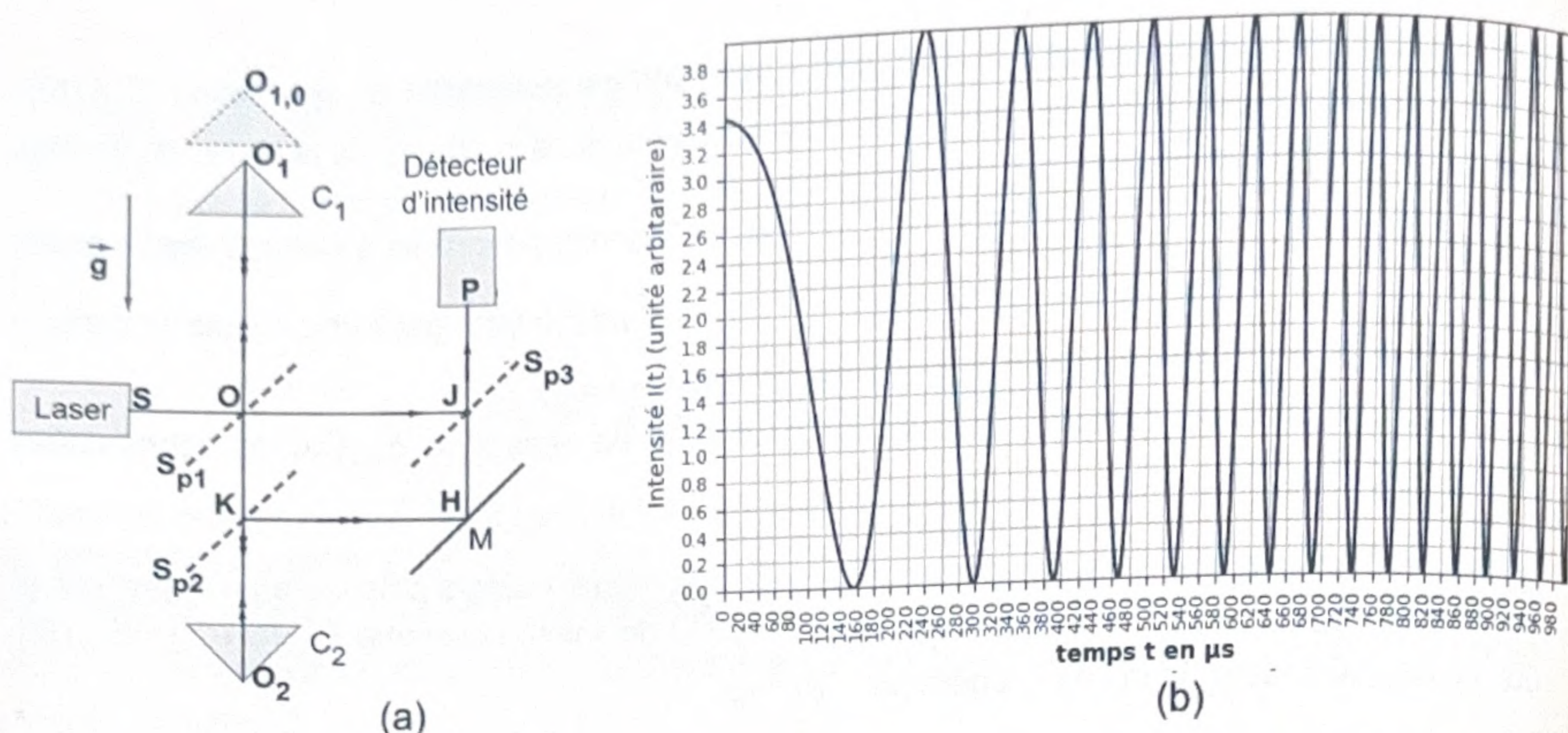


Figure 3 - Mesure du champ de pesanteur terrestre par un interféromètre de Mach-Zehnder

Q9. Le corps  $C_1$  tombe en chute libre, sans vitesse initiale, parallèlement à lui-même à l'intérieur d'une chambre vide.

a) Justifier l'hypothèse de la norme  $g$  constante en donnant une estimation de la variation

relative  $\frac{g(h) - g(0)}{g(0)}$  pour une hauteur de chute égale à  $h = 1 \text{ m}$ .

b) Déterminer, alors, l'équation horaire du mouvement de  $O_1$  en fonction du temps :  $z_1(t)$ , en prenant la position initiale  $O_{10}(t=0)$  comme origine des espaces sur l'axe vertical descendant.

On étudie l'interférence des deux rayons, passant par  $O_1$  et  $O_2$ , qui arrivent au point  $P$  du récepteur après des parcours optiques distincts. Le point  $O_2$  appartient aussi à la même verticale que  $O_1$ , il est repéré par son ordonnée  $z_2 = 0,3 \text{ m}$ .

Q10. a) Exprimer en fonction du temps  $t$  la différence de chemins optiques  $\delta(P,t)$  entre ces deux rayons.

b) On donne, en **figure 3(b)**, la représentation graphique  $I(t)$  de l'intensité au point  $P$  en fonction du temps. On note  $t_0$  l'instant correspondant au premier minimum de l'intensité et  $t_q$  les instants des autres minima d'intensité successifs, avec  $q$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ .

Exprimer la quantité  $\Delta_q = \delta(P,t_q) - \delta(P,t_0)$ . En déduire l'expression de  $g$  en fonction de  $t_0, t_q, \lambda$  et de  $q$ .

c) On veut déterminer la valeur locale de  $g$ . Il est commode d'exploiter le graphe d'une fonction linéaire affine  $y(q)$  : préciser ce qu'est la fonction  $y$ .

Les mesures expérimentales permettent d'obtenir  $y(q) = 64\,598q$ . Sans effectuer le calcul numérique, indiquer comment on en déduit que  $g = 9,7961 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## Partie IV - Le calcaire et l'argile : des richesses du sol bon marché

Données utiles pour la partie IV						
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$					
Masses molaires en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$	Carbone	Oxygène	Silicium	Aluminium	Calcium	Fer
	C	O	Si	Al	Ca	Fe
	12	16	28	27	40	56
Produit ionique de l'eau (à 25 °C)	$K_e = 10^{-14}$					

Dans les parties de chimie, l'état d'une substance chimique est noté en indice : *s* désigne *solide*, *g* désigne *gaz* et *aq* signifie *dissous en solution aqueuse*.

### Partie IV.1 - Obtention d'un ciment

Vers 1 450 °C, on élabore le ciment à partir de la chaux  $\text{CaO}_{(s)}$  provenant du calcaire ( $\text{CaCO}_{3,(s)}$ ) et des oxydes  $\text{SiO}_{2,(s)}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_{3,(s)}$  et  $\text{Fe}_2\text{O}_{3,(s)}$  apportés par l'argile (**tableau 1**).

Oxyde réactif	$\text{CaO}_{(s)}$	$\text{SiO}_{2,(s)}$	$\text{Al}_2\text{O}_{3,(s)}$	$\text{Fe}_2\text{O}_{3,(s)}$
Masse molaire en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$	56	60	102	160
% en masse dans le mélange réactionnel	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$

Tableau 1

Le produit de réaction, appelé ciment, est formé de 4 composants A, B, C et D de formules et de masses molaires  $M$  (en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) données dans le **tableau 2**.

Composant du ciment	A	B	C	D
	$\text{Ca}_3\text{SiO}_5_{(s)}$ $3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$	$\text{Ca}_2\text{SiO}_4_{(s)}$ $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$	$\text{Ca}_3\text{Al}_2\text{O}_6_{(s)}$ $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$	$\text{Ca}_4\text{Al}_2\text{Fe}_2\text{O}_{10,(s)}$ $4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$
$M$ (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	228	172	270	486
% en masse	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$

Tableau 2

La qualité du ciment dépend des compositions massiques des quatre composants A, B, C et D et celles-ci peuvent être obtenues par des formules dites formules de Bogue.

On fait les hypothèses suivantes :

- (H1) : tout l'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_{3,(s)}$  se retrouve dans le composé D,
- (H2) : tout l'oxyde  $\text{Al}_2\text{O}_{3,(s)}$  restant sert à fabriquer le composé C,
- (H3) : tout l'oxyde  $\text{SiO}_{2,(s)}$  se retrouve dans les composés A et B,
- (H4) : tout l'oxyde  $\text{CaO}_{(s)}$  se retrouve dans l'ensemble des composés A, B, C et D.

**Q11.** Écrire les quatre équations de réactions d'obtention des composés A, B, C et D à partir de leurs oxydes.

On se propose d'écrire un script Python permettant de déterminer la composition massique du ciment en les composants A, B, C et D, en fonction de la composition en oxydes réactifs  $\text{CaO}_{(s)}$ ,  $\text{SiO}_{2,(s)}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_{3,(s)}$  et  $\text{Fe}_2\text{O}_{3,(s)}$ .

On introduit le vecteur *oxy* dont les composantes sont  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  et  $p_4$  et le vecteur *cim* de composantes  $p_5$ ,  $p_6$ ,  $p_7$  et  $p_8$ .

Soit *gob* la matrice 4x4 telle que  $\text{oxy} = \text{gob} \cdot \text{cim}$ .

Q12. Compléter le script ci-dessous à la ligne 5, qui définit la matrice  $gob$  par ses éléments  $\beta_{ij}$  exprimés en fonction des masses molaires  $M_{1 \leq i \leq 8}$ .

Le script se poursuit par les lignes 6, 7 et 8 :

- la ligne 6 détermine  $bog$ , la matrice inverse de la matrice  $gob$ ,
- la ligne 7 définit le vecteur  $cim$  et la ligne 8 affiche le résultat.

```

1 import numpy as np
2 M1,M2,M3,M4=56,60,102,159
3 M5,M6,M7,M8=3*M1+M2,2*M1+M2,3*M1+M3,4*M1+M3+M4
4 oxy=np.array([62, 24, 9, 5]) #exemple d'un mélange réactionnel des quatre oxydes
5 gob=... #définition de la matrice gob
6 bog=np.linalg.inv(gob)
7 cim=np.dot(bog,oxy)
8 print('cim=',cim)

```

## Partie IV.2 - Les pluies acides

D'après *Cembureau*, l'Association européenne du ciment, en 2023, la production mondiale de ciment s'est élevée à 4,0 Gt. Cette production s'accompagne de l'émission d'énormes quantités du dioxyde de carbone. Dans l'eau, ce gaz donne une solution de diacide faible ( $\text{CO}_{2,(aq)}, \text{H}_2\text{O}$ ) qu'on pourra modéliser par la "formule"  $\text{H}_2\text{CO}_{3,(aq)}$ .

- Q13. a) Écrire les deux équilibres acido-basiques de ce diacide et expliciter l'expression de leurs quotients réactionnels. On supposera les solutions aqueuses suffisamment diluées pour confondre les activités des solutés avec la valeur de leur concentration en quantité de matière volumique exprimée en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- b) La **figure 4** donne, en fonction du pH, les proportions, ou pourcentages (%), des différentes espèces acido-basiques issues de la dissolution du dioxyde de carbone dans l'eau : ces courbes sont notées (1), (2) et (3). Attribuer chacune de ces courbes aux trois espèces acido-basiques du diacide.
- c) Déterminer les valeurs des constantes d'acidités  $K_{a1}$  et  $K_{a2}$  pour le diacide étudié.

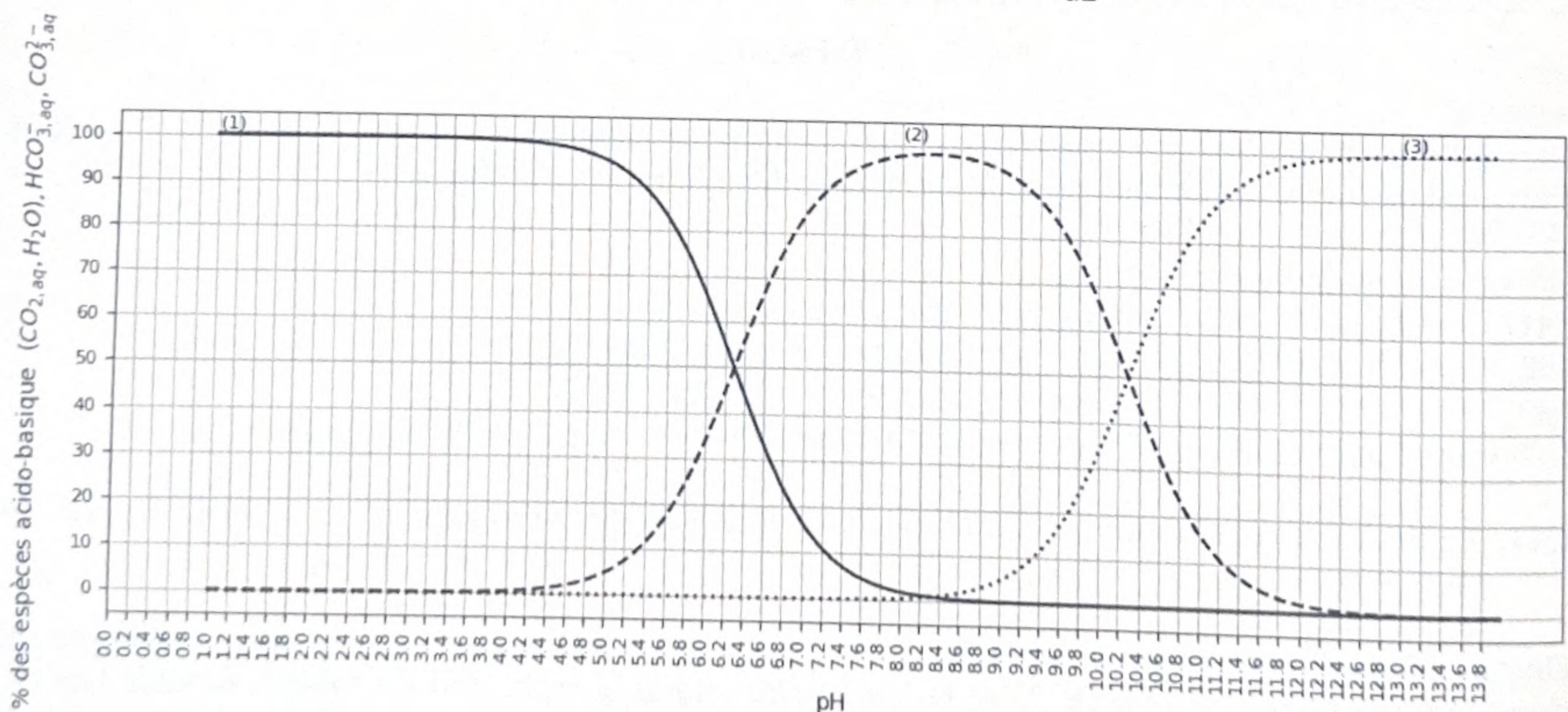


Figure 4 - Distribution des espèces acido-basiques issues de la dissolution de  $\text{CO}_{2,(g)}$  dans l'eau, en fonction du pH

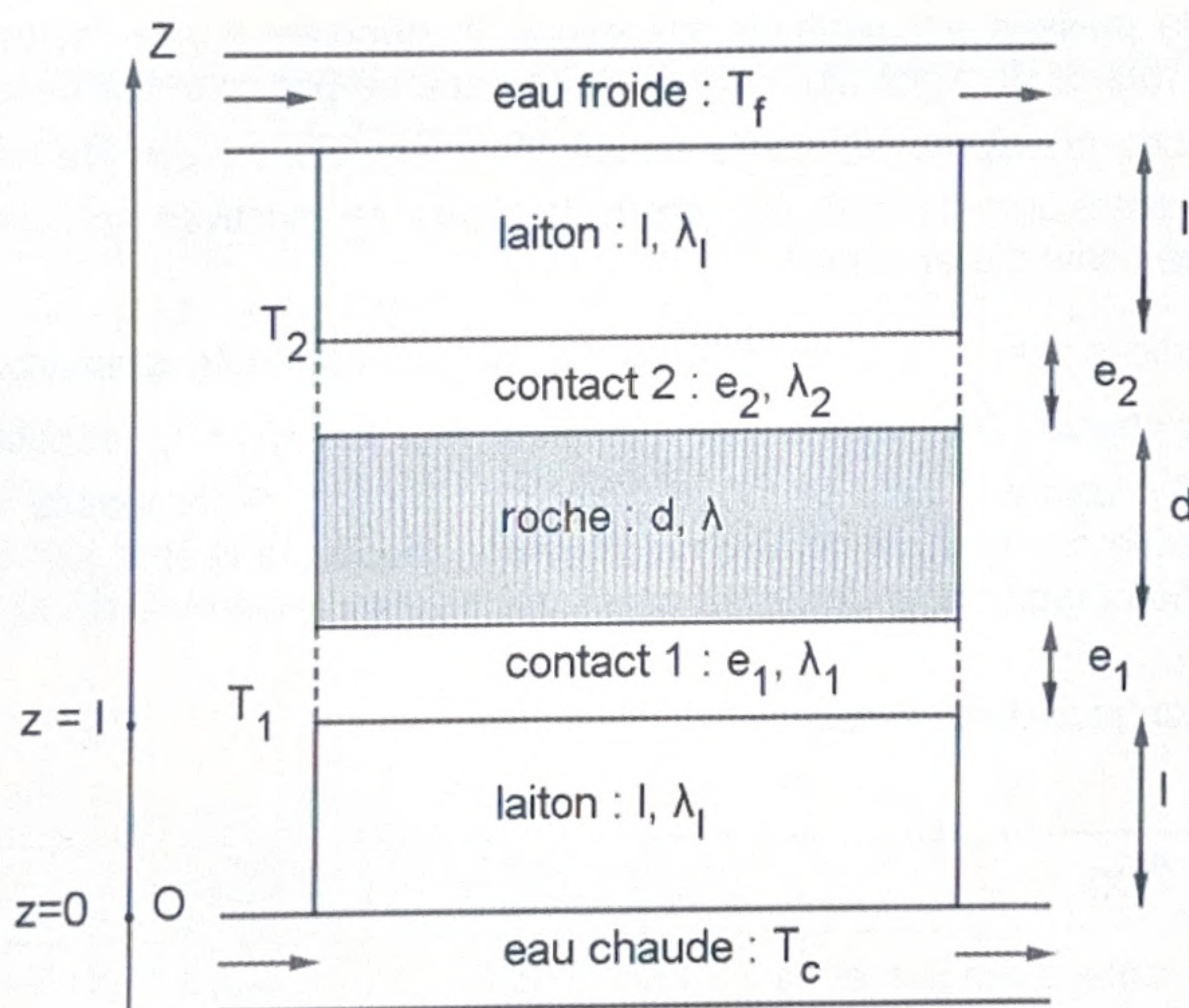
- Q14.** On étudie l'eau de pluie devenue acide à cause de la dissolution du dioxyde de carbone  $\text{CO}_{2(g)}$  atmosphérique. Elle impose une concentration molaire volumique du dioxyde de carbone dissous  $c = [\text{CO}_{2(aq)}, \text{H}_2\text{O}] = 1,0 \cdot 10^{-5}$  constante à température et pression fixées. Établir l'expression du pH de cette solution à 25 °C et déterminer les valeurs de toutes les concentrations des espèces présentes dans la solution.

## Partie V - Quelques propriétés thermodynamiques de la Terre

La vie de tous les êtres vivants dépend de la température sur la Terre et celle-ci relève de son bilan énergétique. Une variation moyenne de la température de 1,5 K peut entraîner des conséquences importantes pour l'humanité.

### Partie V.1 - Mesure de la conductivité thermique d'une roche terrestre

On considère le dispositif représenté en **figure 5**. Des thermocouples permettent de mesurer les différentes températures. On note  $T_c$  et  $T_f$  les températures imposées grâce à des courants d'eau chaude et froide respectivement ;  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures aux interfaces entre le laiton et les contacts 1 et 2 respectivement. On note  $d$  et  $l$  les longueurs respectives de l'échantillon de roche et de celui du laiton (alliage métallique). Les "contacts" entre la roche et le laiton, par de l'air par exemple, mettent en jeu des résistances thermiques inconnues, sur des épaisseurs  $e_1$  et  $e_2$ . Enfin, on note par  $\lambda_l$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les conductivités thermiques du laiton, de la roche et des contacts 1 et 2. On admet qu'avec ce dispositif la température ne dépend que de la variable  $z$ .



**Figure 5** - Dispositif de mesure de la conductivité thermique d'une roche

- Q15.** Donner la définition et l'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  d'un conducteur thermique de conductivité  $\lambda$ , de section  $s$  et de longueur  $l$  traversé par un flux thermique uniforme perpendiculaire à la section.

- Q16.** Établir alors, la relation  $\frac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = \frac{\lambda_l}{l} \left( \frac{d}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$ . Expliquer comment on peut déterminer  $\lambda$  expérimentalement, en s'affranchissant des indéterminations dues aux contacts.

## Partie V.2 - Évolution de la température à l'intérieur de la Terre

On considère une sphère de centre  $O$ , de rayon  $r$ , de masse volumique uniforme  $\mu$  et de masse  $m$ . Une masse  $dm$  est apportée depuis l'infini jusqu'à la distance  $r$  sur la surface de la sphère.

**Q17. a)** Exprimer l'énergie gravitationnelle finale  $dE_{pG}(r)$  des masse  $m$  et  $dm$ . On considère l'énergie gravitationnelle nulle quand  $dm$  est infiniment éloignée de  $m$ .

**b)** On modélise la formation d'une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de masse volumique uniforme  $\mu$  par l'apport de coquilles sphériques, d'épaisseur  $dr$  et de volume  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , depuis l'infini jusqu'à la position occupée dans la sphère.

Établir que l'expression de l'énergie gravitationnelle  $E_{pG}(R)$  de cette distribution de

masse totale  $M$  est :  $E_{pG}(R) = -\frac{3G}{5} \frac{M^2}{R}$ . Commenter le signe.

**Q18.** La sphère précédente modélise la Terre. En supposant que l'énergie gravitationnelle est convertie totalement en énergie thermique, exprimer la température  $T_{eq}$  atteinte par la Terre à partir d'une température initiale voisine de  $0$  K, en fonction de  $M_T, R_T, G$  et de  $C$  (capacité thermique massique de la Terre). Estimer  $T_{eq}$  et commenter.

Le manteau terrestre, de masse volumique moyenne  $\mu = 4,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , occupe 84 % du volume total de la Terre.

On s'intéresse à la puissance calorifique volumique  $p_v$  générée par la radioactivité d'éléments contenus dans les roches du manteau. La puissance générée par cette radioactivité est estimée à  $P = 1,2 \cdot 10^{13} \text{ W}$ . Les principaux éléments radioactifs à prendre en compte sont l'uranium U, le thorium Th et le potassium K dont les désintégrations radioactives produisent une quantité d'énergie spécifique convertie en chaleur.

On attribue les indices  $i = 1, 2$  et  $3$  respectivement aux éléments uranium U, thorium Th et potassium K. Pour chacun des noyaux  ${}^A_i X_i$ , on note  $M_i, x_i, \tau_i$  et  $\varepsilon_i$  respectivement la masse molaire, la fraction massique dans la roche (valeur du rapport de la masse de l'isotope par la masse de roche qui la contient), la demi-vie et l'énergie spécifique libérée par atome. La demi-vie  $\tau_i$  (ou "période") correspond à la durée au cours de laquelle le nombre de noyaux est réduit de moitié.

Les valeurs sont données dans le **tableau 3**.

Noyau ${}^A_i X_i$	${}^{238}_{92}\text{U}$	${}^{232}_{90}\text{Th}$	${}^{40}_{19}\text{K}$
Masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	238	232	40
Fraction massique $x_i$ de l'isotope	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$
Demi-vie $\tau_i$ (en $10^9$ ans)	4,46	14,0	1,26
Énergie thermique dégagée $\varepsilon_i$ (en J par noyau) par l'isotope	$7,41 \cdot 10^{-12}$	$6,24 \cdot 10^{-12}$	$1,14 \cdot 10^{-13}$

**Tableau 3** - Production d'énergie par la radioactivité au sein de la Terre

On note  $N_i$  le nombre de noyaux par unité de volume de roche ; lors de la désintégration des noyaux, le taux de variation du nombre  $N_i$  est de la forme :

$$\frac{dN_i}{dt} = -\frac{\ln 2}{\tau_i} N_i.$$

**Q19.** Déterminer l'expression  $N_i(t)$  en notant  $N_{i0}$  sa valeur à l'origine des temps.

**Q20.** Exprimer la puissance volumique  $p_{v,i}(t)$  pour l'élément  $X_i$  dégagée par radioactivité dans les roches, en fonction des données utiles. En déduire la puissance totale  $p_v(t)$  dégagée par les trois éléments radioactifs.

On utilise le script Python ci-dessous pour étudier l'évolution temporelle de la puissance volumique.

```

1  import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
2  Na,mu=6.02*10**23,4500
3
4  Mi=np.array([0.238,0.232,0.04])
5  ci=np.array([(10**-8)*1.3,(10**-8)*4,(10**-8)*1.87])
6  epsi=np.array([(10**-12)*7.41,(10**-12)*6.24,(10**-12)*0.114])
7  tau=(365*24*3600*10**9)*np.array([4.46,13.9,1.26])
8  tGyi=np.array([4.46,13.9,1.26])
9
10 pvi0=0.69*mu*Na*np.array([(ci[k]*epsi[k])/(Mi[k]*tau[k]) for k in range(0,3)])
11 t=np.linspace(0,10,100)#Gigaans
12 def pv(t):
13     return # expression de pv(t) de la question Q20
14 #v.min(): donne la valeur minimale des éléments du vecteur v
15 Dp=(np.abs(pv(t)-pv(0)/2)).min()
16 #l.index(x): donne la position de x dans la liste l
17 n=((np.abs(pv(t)-pv(0)/2)).tolist()).index(Dp)
18 t0=t[n]
19 print('pv0(nW/m3)=' ,pv(0),' --- t0=' ,t0)
20 ...
    ...

```

**Q21.** Compréhension et exploitation du script

- Ligne 10 : donner la signification physique de  $pvi0$ .
- Ligne 15 : que représente la grandeur  $Dp$  ?
- Ligne 17 : que représente  $n$  ?
- Ligne 19 : que représentent  $p_v(0)$  et  $t_0$  ? Comment augmenter la précision sur  $t_0$  ?
- Compléter les lignes, après la ligne 19, pour que l'exécution du programme donne et visualise l'allure du graphe de la puissance volumique totale en fonction du temps  $p_v(t)$  (sans quadrillage).

Le graphe de la **figure 6** schématise l'évolution de la puissance volumique avec le temps.

- Reproduire l'allure de ce graphe sur votre copie et en déduire, avec justification, la date  $t_{1/2}$  à laquelle la puissance volumique sera réduite de moitié.

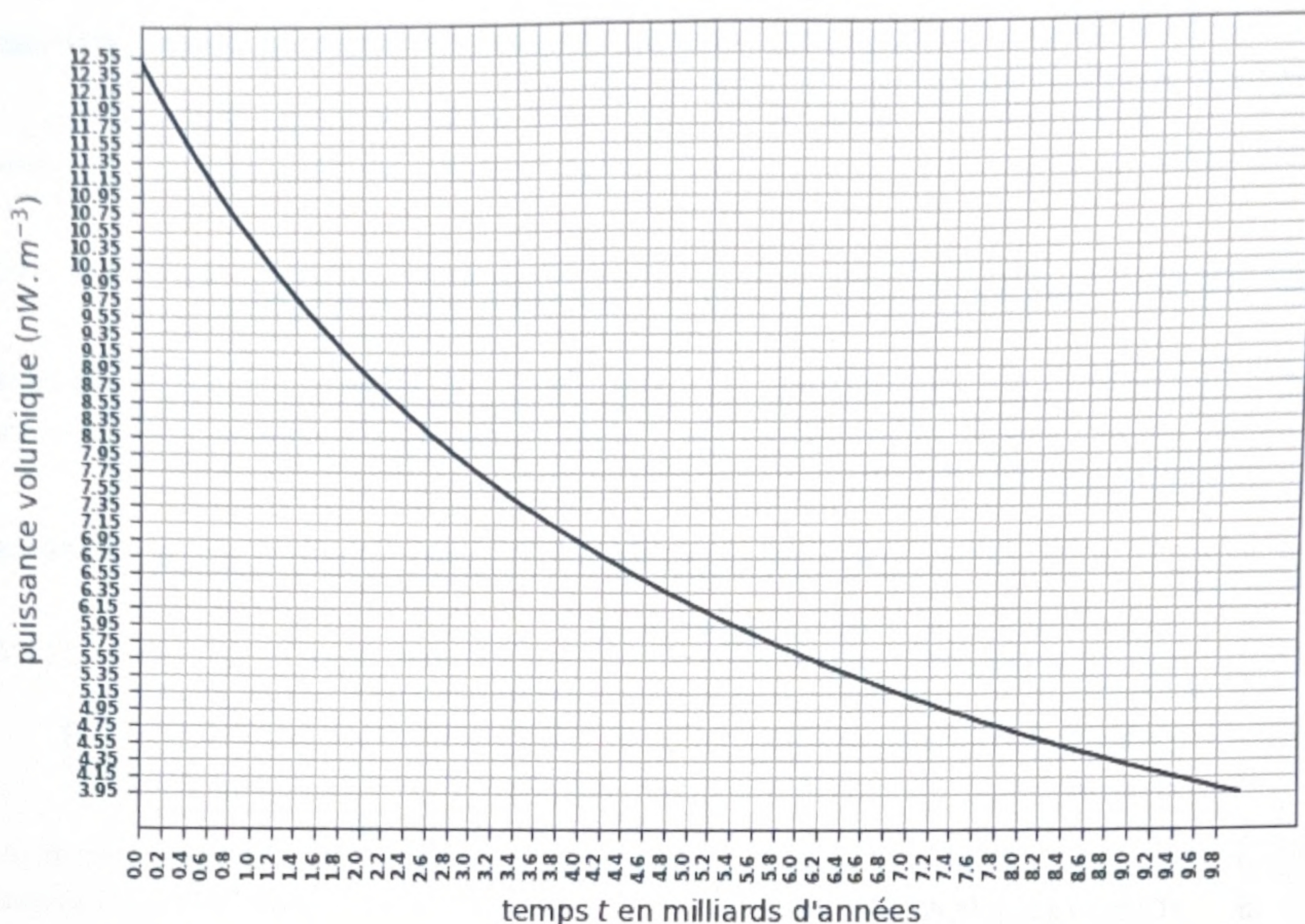


Figure 6 - Évolution de la puissance volumique, d'origine radioactive, avec le temps

La Terre sphérique, de rayon  $R_T$ , est supposée homogène et caractérisée par les valeurs uniformes de sa masse volumique  $\mu$ , sa capacité thermique massique  $C$  et sa conductivité thermique  $\lambda$ , de valeur approximative  $\lambda \approx 3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Q22. Justifier que le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}$  est radial.

On pose  $\vec{j} = j(M, t) \vec{u}_r$ . Préciser les invariances.

On se propose d'établir l'expression donnant les variations de la température  $T(M, t)$  dans la Terre.

Q23. On se place d'abord en régime variable et on prend comme système la coquille sphérique d'épaisseur  $dr$ , comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ . Pendant la durée élémentaire  $dt$ , la température de ce système varie de  $dT$ . Expliciter le raisonnement qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\mu C 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t} dt dr = -d(j 4\pi r^2) dt + \rho'_v 4\pi r^2 dr dt .$$

Donner la signification physique de chacun de ces trois termes.

On néglige la variation temporelle de la température dans la question Q24.

Q24. a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(r)$ .

b) Déterminer la loi de variation spatiale de la température  $T(r)$  dans la Terre en supposant que la température est finie au centre de celle-ci et que la puissance volumique  $\rho'_v$  est uniforme dans tout le volume de la Terre. La température du sol vaut  $T_s = 298 \text{ K}$ .

c) Déterminer l'expression de la puissance surfacique  $j(r)$ .

d) On donne la puissance surfacique à la surface de la Terre  $j(R_T) = 70 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ . En déduire la valeur de  $p'_V$ . Commenter compte tenu de Q21.

## Partie VI - Bilan énergétique sur le sol de la Terre, d'après une analyse documentaire

Une température convenable à la surface de la terre est primordiale pour toutes les formes de la vie. Cette température résulte des échanges énergétiques de la Terre avec le Soleil, principalement, et avec l'atmosphère. Ces échanges sont représentés sur la **figure 7**, où les valeurs des puissances surfaciques sont données en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ . En particulier, la puissance surfacique du rayonnement solaire en haut de l'atmosphère vaut  $\varphi_S = 341 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

On notera  $P_s$  la puissance rayonnée par la surface du Soleil et  $D$  la distance entre le Soleil et la Terre, avec  $D = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

On rappelle qu'un corps noir, de température  $T$ , émet un maximum d'énergie électromagnétique pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée par la loi de Wien, on a :  $\lambda T = C_W$  où  $C_W$  est appelée constante de Wien. En outre, le flux surfacique émis est donné par la loi de Stefan  $\varphi = \sigma T^4$  où  $\sigma$  est la constante de Stefan.

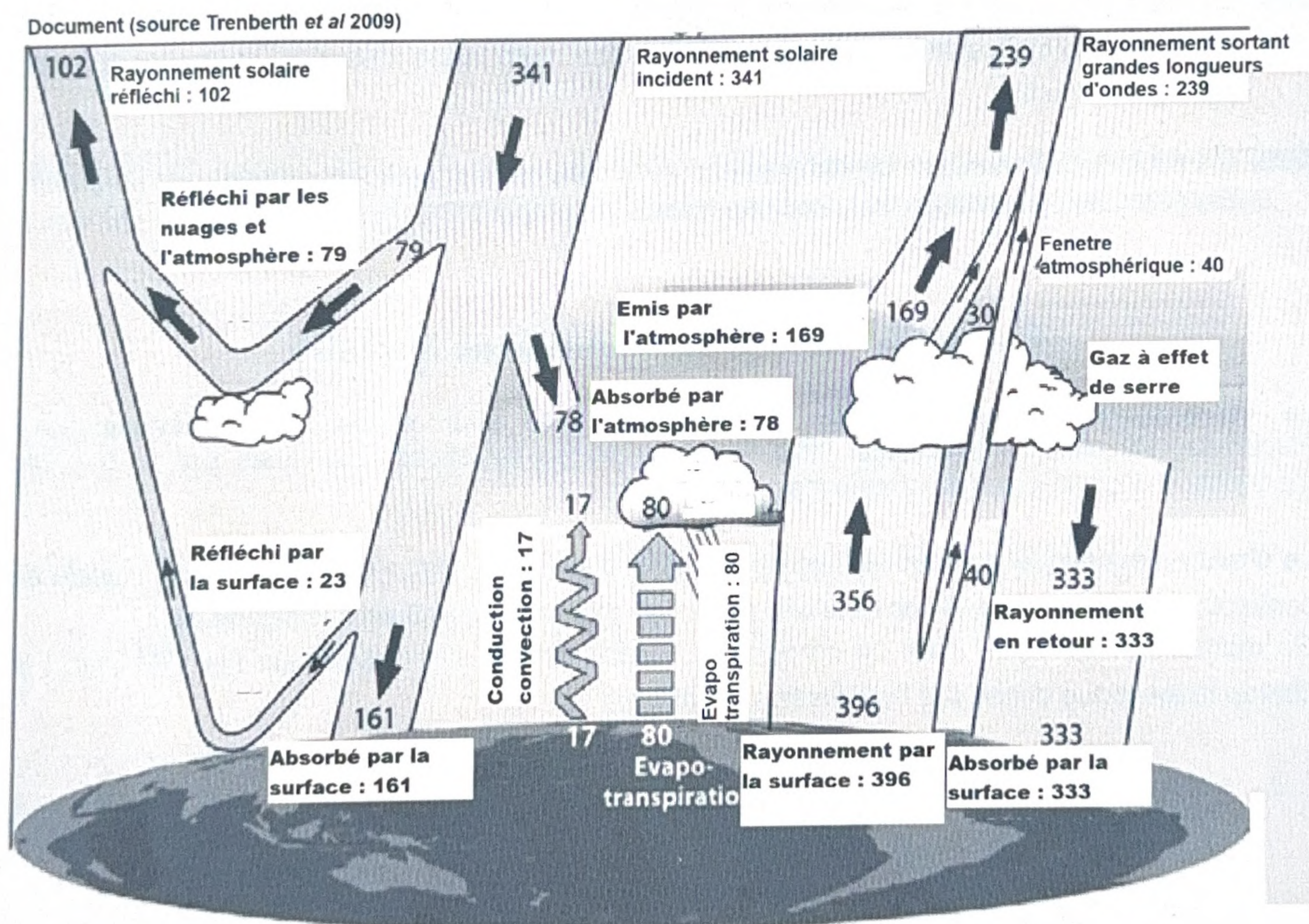


Figure 7 - Flux énergétiques échangés entre le sol terrestre, le Soleil et l'atmosphère (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )

Dans le vide interstellaire et en tout point  $M$  éloigné du soleil, celui-ci peut être assimilé à un point  $C$ , son centre, et l'on pose  $\overline{CM} = r \overline{u}_r$ . Le rayonnement solaire est à symétrie sphérique, le vecteur de Poynting est radial :  $\overline{R} = R(r,t) \overline{u}_r$  et on note  $u_{em}(M,t)$  la densité volumique d'énergie électromagnétique.

**Q25.** On considère le couple  $(R, u_{em})$ . En s'appuyant sur l'analogie  $(R, u_{em}) \leftrightarrow (j, \mu c T)$ , donner la relation générale analogue à celle donnée dans la question **Q23**.

Dans notre cas particulier et en supposant qu'on est en régime permanent, donner la relation entre la puissance rayonnée  $P_{em}(r=D)$  à travers une sphère de rayon  $D$  et la puissance  $P_S$ .

**Q26.** On note  $P_T$  la puissance reçue à la face supérieure totale de l'atmosphère terrestre. Exprimer la puissance  $P_T$  en fonction de  $P_S$  et des constantes pertinentes.

On assimile le Soleil, de surface  $S_S$ , à un corps noir dont le maximum d'énergie électromagnétique volumique correspond à la longueur d'onde  $\lambda_S = 0,52 \mu\text{m}$ .

**Q27.** Montrer que la puissance totale émise de la surface du soleil  $P_S$  peut s'exprimer en fonction

de  $\lambda_S$  par la relation :  $P_S = \sigma S_S \left( \frac{C_W}{\lambda_S} \right)^4$ , dans laquelle  $C_W$  est une constante qui vaut  $C_W \approx 0,03 \text{ m} \cdot \text{K}$  et  $\sigma$  est la constante de Stefan.

**Q28.** En exploitant certaines données de la **figure 7**, estimer la puissance  $P_S$ . Utiliser un bilan énergétique pour estimer la puissance surfacique nette algébrique  $\phi_{tot}$  reçue par la Terre seule. Commenter.

**Q29.** On note  $\Delta T$  la variation de température au niveau du sol terrestre pendant une durée  $\tau$ . Exprimer  $\Delta T$  en fonction des données utiles. Faire l'application numérique pour  $\tau = 10$  ans.

## Partie VII - Le champ magnétique terrestre

La connaissance du magnétisme terrestre est utile pour étudier les communications électromagnétiques. La protection vis-à-vis de certaines radiations cosmiques par le bouclier magnétique dépend aussi du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique  $\overline{m} = -m \overline{u}_z$ , placé au centre  $O$  de la Terre et porté par l'axe des pôles  $OZ$ , axe orienté de S vers N (**figure 8**).

On montre que ce dipôle crée en un point  $M$ , repéré dans la base sphérique par  $\overline{OM} = r \overline{u}_r$ , le champ magnétique donné par l'expression intrinsèque :

$$\overline{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left( 3(\overline{m} \cdot \overline{r}) \overline{r} - (\overline{r})^2 \overline{m} \right)}{r^5}.$$

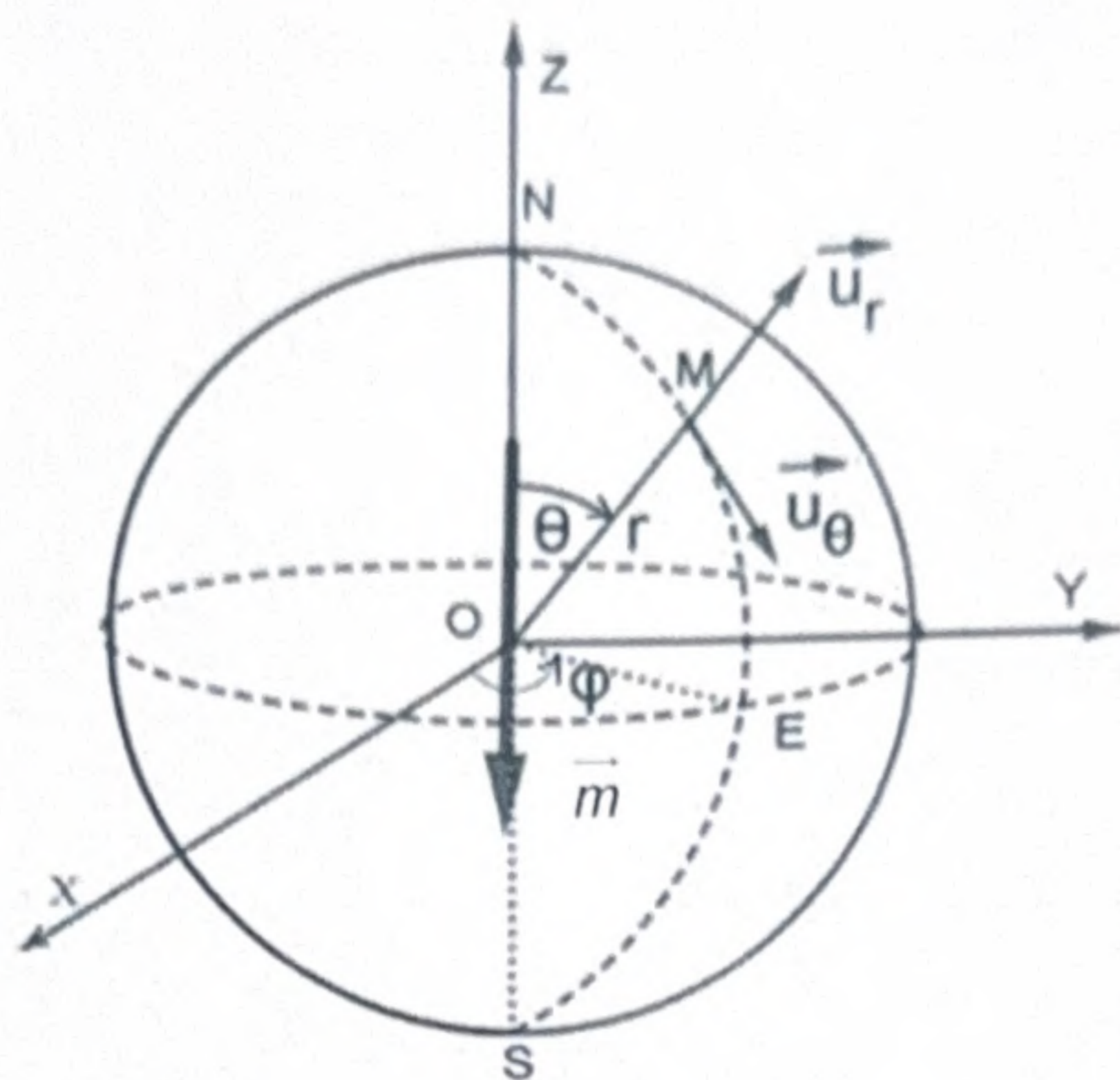
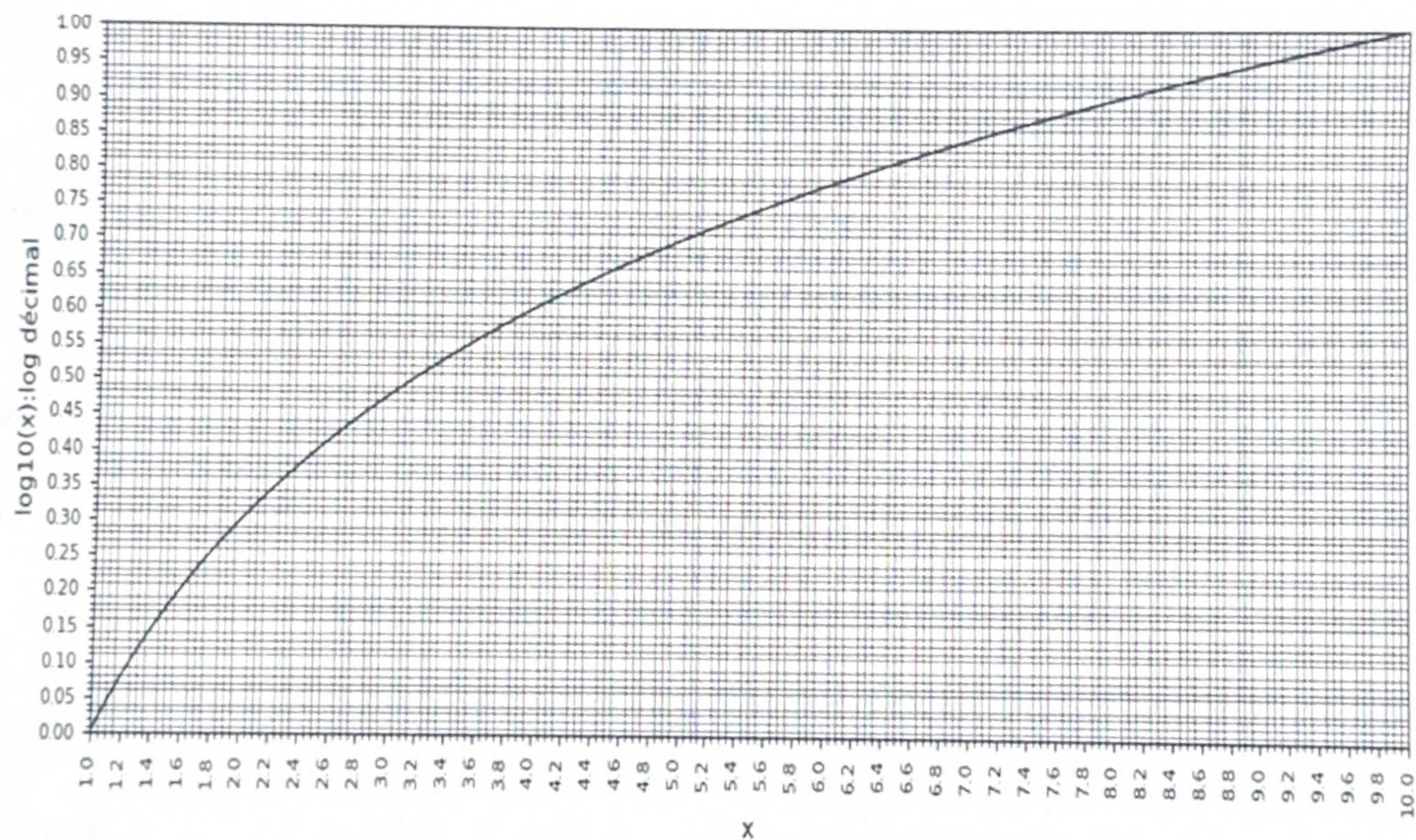


Figure 8 - Dipôle magnétique terrestre

- Q30. Donner les trois composantes  $(B_r, B_\theta, B_\varphi)$  du champ magnétique dans la base sphérique.
- Q31. Déterminer l'équation  $r(\theta)$  d'une ligne de champ magnétique et tracer l'allure du graphe d'une ligne de champ dans un plan méridien.
- Q32. En un lieu du sol terrestre de latitude  $\Lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ , expliciter la composante horizontale  $B_h$  et la composante verticale  $B_v$  du champ magnétique terrestre en fonction de  $m$ ,  $\Lambda$ ,  $\mu_0$  et de  $R_T$ .
- Q33. **Application numérique** : sur le sol de l'équateur, l'intensité du champ magnétique est  $B = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ . En déduire une estimation de la valeur  $m$  du dipôle magnétique terrestre.

Annexe - Valeurs pour faire certains calculs numériques et courbe  $\log_{10}(x)$ 

Données	Valeur x	$\log_{10}(x)$
$\pi$	3,14	0,50
Rayon de la Terre supposée sphérique	$R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$	6,81
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	24,78
Constante d'attraction universelle	$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	- 10,17
Vitesse angulaire de rotation de la Terre /axe sud-nord	$\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	- 4,14
Capacité calorifique massique de la Terre	$C \approx 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	3,00
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	23,78
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	- 5,90



FIN