

# Correction Détaillée

## CCINP (Concours Commun INP) — Session 2026

### Filière MP — Épreuve Spécifique

### Physique – Chimie

« Notre Terre : attractive, si chaleureuse et... magnétique »

---

## Contents

---

## Partie I — Champ gravitationnel et champ de pesanteur

### Analogie gravitation / électrostatique

#### Question 1.

**Champ gravitationnel** créé par une masse  $m$  en O, au point M :

$$\vec{G}(M) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$

**Champ électrostatique** créé par une charge  $q$  en O, au point M :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

**Analogie** : La charge  $q$  joue le rôle de  $-\frac{m}{4\pi\epsilon_0 G}$ ... On préfère l'analogie directe :

$$q \leftrightarrow -m, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow G$$

**Théorème de Gauss gravitationnel (par analogie avec Gauss électrostatique)** :

Pour une surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$  contenant une distribution volumique de masse  $\mu(P)$  :

$$\oint_S \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G \iiint_V \mu(P) d\tau$$

#### Remarque / Astuce

Le signe  $-$  dans le flux de  $\vec{G}$  traduit le fait que la gravitation est **toujours attractive**, contrairement à l'électrostatique où le champ pointe vers l'extérieur pour une charge positive.

#### Question 2.

La Terre est une sphère homogène de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$ . Par le théorème de Gauss gravitationnel, en supposant la symétrie sphérique :

**À l'extérieur** ( $r > R_T$ ) : la Terre entière est enfermée dans la surface de Gauss, donc :

$$G_T(M) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G M_T \implies \vec{G}_T(M) = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{u}_r \quad (r > R_T)$$

**À l'intérieur** ( $r < R_T$ ) : seule la masse  $M_{\text{int}} = \mu_T \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$  est enfermée :

$$\vec{G}_T(M) = -\frac{G \mu_T \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{4\pi G \mu_T}{3} r \vec{u}_r \quad (r < R_T)$$

Avec  $\mu_T = 5400 \text{ kg m}^{-3}$ .

#### Question 3.

**Principe de superposition :** Le champ gravitationnel en présence de la poche de pétrole s'obtient comme le champ de la Terre pleine *moins* le champ de la sphère de roche (de masse volumique  $\mu_T$ ) occupant le volume de la poche, *plus* le champ de la poche de pétrole (de masse volumique  $\mu_p$ ) :

$$\vec{G}_{T_p}(M) = \vec{G}_T(M) - \underbrace{\vec{G}_{\text{roche poche}}(M)}_{\text{sphère } \mu_T, r', C} + \underbrace{\vec{G}_{\text{ptrole}}(M)}_{\text{sphère } \mu_p, r', C}$$

Le point M est sur la verticale OCZ, à la surface. La distance  $CM = d$ .

La sphère de centre C de rayon  $r'$  crée au point M (extérieur,  $d > r'$ ) un champ assimilable à celui d'une masse ponctuelle :

$$G_{\text{sphère}}(M) = -\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3 \mu}{d^2} \quad (\text{composante selon } \vec{u}_z, \text{ vers le bas})$$

Donc :

$$G_{T_p}(M) = G_T(M) - \frac{4\pi G r'^3}{3d^2}(\mu_T - \mu_p) \cdot (+1)$$

En valeur signée (vers le bas positif pour  $G_T < 0$ , on travaille en normes en prenant les signes) :

$$G_{T_p}(M) = G_T(M) \left[ 1 - \frac{4\pi G r'^3 (\mu_T - \mu_p)}{3d^2 \cdot |G_T(M)|} \right]$$

La **variation relative** est :

$$\varepsilon = \frac{G_T(M) - G_{T_p}(M)}{G_T(M)} = \frac{4\pi G r'^3 (\mu_T - \mu_p)}{3d^2 |G_T(M)|}$$

Or  $|G_T(M)| = \frac{GM_T}{R_T^2}$  à la surface, donc  $|G_T(M)| = \frac{4\pi G \mu_T R_T}{3}$ , ce qui donne :

$$\varepsilon = \frac{r'^3}{d^2 R_T} \cdot \frac{\mu_T - \mu_p}{\mu_T}$$

**Application numérique :**  $\frac{r'}{d} = \frac{1}{2}$  donc  $r'^3/d^2 = r' \cdot (r'/d)^2 = r' \cdot \frac{1}{4}$ , et  $\frac{r'}{R_T} = 10^{-3}$ , donc  $r' = 10^{-3} R_T$ .

$$\varepsilon = \frac{(r'/d)^2 \cdot (r'/R_T)}{1} \cdot \frac{\mu_T - \mu_p}{\mu_T} = \frac{1}{4} \times 10^{-3} \times \frac{1}{6} \approx 4 \times 10^{-5}$$

**Commentaire :** Les gravimètres actuels ont une précision de  $10^{-8}$ , soit bien meilleure que  $4 \times 10^{-5}$ . La détection est donc en principe **possible**. La poche de pétrole, moins dense que la roche ( $\mu_p < \mu_T$ ), rend le champ **moins intense** ( $\varepsilon > 0$  signifie  $G_{T_p} < G_T$  en norme).

### Remarque / Astuce

**Astuce :** Le principe de superposition + l'assimilation à une masse ponctuelle (valable car  $r' \ll d$ ) est la clé de cette question. On remplace « roche  $\rightarrow$  pétrole » par « soustraction de roche + ajout de pétrole ».

## Partie II — Forme de la Terre

**Question 4.** Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}(M)$  est défini dans le référentiel terrestre (non galiléen). Le terme  $-GM_T \frac{\vec{u}_r}{r^2}$  est le terme **gravitationnel**. Le terme  $\Omega^2 \overrightarrow{HM}$  est le terme d'**inertie d'entraînement** (force centrifuge). À la surface :  $|\vec{g}| \approx GM_T/R_T^2 \approx 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

**Question 5.** La force de Coriolis vaut  $\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ , donc  $|F_{\text{Cor}}| = 2m\Omega v$ . Pour un TGV à  $v = 100 \text{ m/s}$  :  $F_{\text{Cor}}/P = 2\Omega v/g \approx 2 \times 7,3 \times 10^{-5} \times 100/9,8 \approx 1,5 \times 10^{-3} \ll 1$ . Négligeable.

**Question 6.**

À la surface de la Terre ( $r = R_T$ ), le terme d'entraînement est maximal à l'équateur :  $a_e = \Omega^2 R_T$ .

$$\eta = \frac{\Omega^2 R_T^2}{GM_T/R_T} = \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T}$$

$$\eta = \frac{(7,3 \times 10^{-5})^2 \times (6,4 \times 10^6)^3}{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}$$

Numérateur :  $(5,3 \times 10^{-9}) \times (2,6 \times 10^{20}) \approx 1,4 \times 10^{12}$ . Dénominateur :  $4 \times 10^{14}$ .  $\eta \approx 3,5 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{300}$ .

**Commentaire :**  $\eta \ll 1$  confirme que la Terre est quasi-sphérique, l'aplatissement est faible.

**Question 7.**

a) L'énergie potentielle de gravitation (force dérivant d'un potentiel, nulle à l'infini) :

$$E_{pG}(M) = -\frac{GM_T m}{r}$$

b) La force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_e = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$  dérive de :

$$E_{pe}(M) = -\frac{1}{2}m\Omega^2(HM)^2$$

car  $\vec{F}_e = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{pe}$  et  $HM$  est la distance à l'axe. *Vérification :*  $\overrightarrow{\text{grad}}(-\frac{1}{2}\Omega^2 H^2) = -\Omega^2 H \vec{u}_H = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ , donc  $\vec{F}_e = +m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ .

c) En coordonnées sphériques ( $r, \theta$ ) :  $HM = r \sin \theta$ , donc :

$$E_{pp}(M) = E_{pG}(M) + E_{pe}(M) = -\frac{GM_T m}{r} - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

**Question 8.**

Sur la surface équipotentielle  $\Sigma$  :  $E_{pp}(M) = E_{pp}(N)$  où  $N$  est le pôle Nord ( $r = r_n, \theta = 0$ ).

$$E_{pp}(N) = -\frac{GM_T m}{r_n} - 0 = -\frac{GM_T m}{r_n}$$

Pour un point  $M \in \Sigma$  :  $r = r(\theta)$ , avec  $r \approx r_n + \delta r$  :

$$-\frac{GM_T}{r} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \sin^2 \theta = -\frac{GM_T}{r_n}$$

Au premier ordre en  $\delta r/r_n$  et en  $\eta$  :

$$-\frac{GM_T}{r_n} \left(1 - \frac{\delta r}{r_n}\right) - \frac{\Omega^2 r_n^2}{2} \sin^2 \theta = -\frac{GM_T}{r_n}$$

$$\frac{GM_T}{r_n} \cdot \frac{\delta r}{r_n} = \frac{\Omega^2 r_n^2}{2} \sin^2 \theta$$

$$\delta r = \frac{\Omega^2 r_n^3}{2GM_T} \sin^2 \theta = \frac{\eta r_n}{2} \sin^2 \theta$$

Donc :  $r(\theta) \approx r_n (1 + \frac{\eta}{2} \sin^2 \theta)$ , soit  $r(\theta) \approx r_n (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)$  avec  $\varepsilon = \eta/2$ .

**Paramètre d'aplatissement** : À l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) :  $r_e = r_n(1 + \varepsilon)$ , donc :

$$\varepsilon' = \frac{r_e - r_n}{r_n} = \varepsilon = \frac{\eta}{2} = \frac{\Omega^2 R_T^3}{2GM_T} \approx 1,7 \times 10^{-3}$$

La Terre est légèrement **aplatie aux pôles** (ellipsoïde de révolution aplati).

## Partie III — Détermination optique du champ de pesanteur

### Question 9.

a) Variation relative de  $g$  sur  $h = 1$  m :  $g(r) = GM_T/r^2$ , donc  $\frac{dg}{dr} = -2g/r$ .

$$\frac{g(h) - g(0)}{g(0)} \approx \frac{2h}{R_T} = \frac{2}{6,4 \times 10^6} \approx 3 \times 10^{-7} \ll 1$$

Hypothèse de  $g$  constant sur 1 m validée.

b) Chute libre depuis  $O_{10}$  (repos) :  $z_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$  (axe vertical descendant positif).

### Question 10.

a) Le rayon par  $O_1$  parcourt un chemin optique dépendant de la position de  $O_1$ . En chute libre :  $z_1(t) = \frac{1}{2}gt^2$ . Le rayon par  $O_2$  est fixe à  $z_2 = 0,3$  m.

La différence de marche optique (à facteur géométrique 2 près selon le trajet dans l'interféromètre de Mach-Zehnder) :

$$\delta(P, t) = 2(z_2 - z_1(t)) = 2 \left( z_2 - \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

b) Un minimum d'intensité se produit lorsque  $\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$  (opposition de phase). Entre deux minima successifs  $t_0$  et  $t_q$  :

$$\Delta_q = \delta(P, t_q) - \delta(P, t_0) = -g(t_q^2 - t_0^2) = -q\lambda$$

Donc :  $g(t_q^2 - t_0^2) = q\lambda$ .

On pose  $y(q) = t_q^2 - t_0^2$ , alors :

$$y(q) = \frac{\lambda}{g} \cdot q \implies g = \frac{\lambda}{a} \text{ où } y(q) = aq$$

Les mesures donnent  $y(q) = 64598 q \mu\text{s}^2$ , soit  $a = 64598 \times 10^{-12} \text{ s}^2$ .

$$g = \frac{\lambda}{a} = \frac{632,82 \times 10^{-9}}{64598 \times 10^{-12}} = \frac{632,82}{64598} \times 10^3 \text{ m s}^{-2}$$

$$g \approx 9,7961 \text{ m s}^{-2}$$

c) La fonction  $y$  est  $y(q) = t_q^2 - t_0^2$  : c'est la différence entre le carré des instants des  $q$ -ièmes minima et du premier minimum. Le graphe  $y(q)$  est une droite passant par l'origine, de pente  $\lambda/g$ .

### Remarque / Astuce

**Astuce interféromètre + chute libre** : La clé est que  $t_q^2 - t_0^2 = q\lambda/g$  est **linéaire** en  $q$ , ce qui permet une régression linéaire robuste. La mesure de  $g$  par cette méthode est une des plus précises au monde (gravimètre absolu).

## Partie IV — Le calcaire et l'argile

### Partie IV.1 — Calcination du calcaire

#### Question 11.

L'enthalpie libre standard de la réaction (1) est donnée par :

$$\Delta_r G_1^0 = 0,1589(1116 - T) \text{ kJ mol}^{-1}$$

de la forme  $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0$ .

a) **Endothermique ou exothermique ?**

Par identification :  $\Delta_r H_1^0 = 0,1589 \times 1116 \approx 177,4 \text{ kJ mol}^{-1} > 0$ .

La réaction est **endothermique** (absorption de chaleur). Ceci est physiquement cohérent : décomposer un carbonate nécessite d'apporter de l'énergie pour rompre les liaisons.

b)  $\Delta_r S_1^0 = +0,1589 \text{ kJ mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = +158,9 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} > 0$ .

**Commentaire sur le signe** : L'entropie augmente car la réaction libère  $\text{CO}_{2(g)}$ , un gaz, à partir de deux solides. La création d'une mole de gaz à partir de solides entraîne une forte augmentation de désordre ( $\Delta n_{\text{gaz}} = +1$ ).

c) **Constante d'équilibre  $K_1^0(T)$  :**

$$\Delta_r G_1^0 = -RT \ln K_1^0(T) \implies \ln K_1^0(T) = -\frac{\Delta_r G_1^0}{RT}$$

$$\ln K_1^0(T) = -\frac{0,1589(1116 - T) \times 10^3}{8,31 \times T} = -\frac{159(1116 - T)}{8,31 T}$$

Ou encore :  $\ln K_1^0 = \frac{159}{8,31} - \frac{159 \times 1116}{8,31 T} = 19,1 - \frac{21380}{T}$ .

**Température  $T_{1,i}$  telle que  $K_1^0 = 1$ , i.e.,  $\ln K = 0$  :**

$$0 = 0,1589(1116 - T_{1,i}) \implies T_{1,i} = 1116 \text{ K}$$

**d) Quotient réactionnel  $Q_r$  :**

La réaction hétérogène  $\text{CaCO}_{3(s)} = \text{CaO}_{(s)} + \text{CO}_{2(g)}$  implique des solides (activité = 1) et un gaz.

$$Q_r = \frac{a(\text{CaO}) \cdot a(\text{CO}_2)}{a(\text{CaCO}_3)} = \frac{1 \cdot p_{\text{CO}_2}/P^0}{1} = \frac{p_{\text{CO}_2}}{P^0}$$

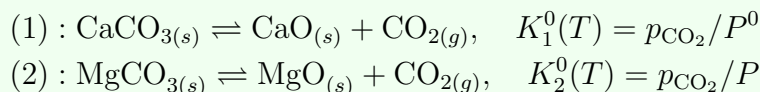
### Remarque / Astuce

**Règle :** Pour un équilibre hétérogène, l'activité des solides purs et des liquides purs est égale à 1 (activité standard). Seuls les gaz et les espèces en solution interviennent dans  $K^0$ .

**Astuce thermodynamique :** La température d'inversion ( $K = 1$ , soit  $\Delta_r G^0 = 0$ ) est  $T_i = \Delta_r H^0 / \Delta_r S^0$ . Ici  $T_{1,i} = \frac{177400}{158,9} \approx 1116 \text{ K}$ . Pour  $T > T_i$ ,  $K > 1$  : la décomposition est favorisée.

### Question 12.

Les deux équilibres hétérogènes sont :



Les températures d'inversion :

$$T_{2,i} = \frac{0,175 \times 674}{0,175} = 674 \text{ K} \approx 401 \text{ }^\circ\text{C}$$

(pour (2)) et  $T_{1,i} = 1116 \text{ K} \approx 843 \text{ }^\circ\text{C}$  (pour (1)).

**a) Description du chauffage sous  $P^\circ = 1 \text{ bar}$  :**

- **En dessous de  $401^\circ\text{C}$  :** aucun équilibre n'est décomposé ( $K_1, K_2 < 1$  et  $p_{\text{CO}_2}^{\text{eq}} < 1 \text{ bar}$ ). Si l'atmosphère est ouverte ( $p_{\text{CO}_2} \approx 0$ ), les deux décompositions sont déjà favorisées mais cinétiquement lentes.
- **À environ  $401^\circ\text{C}$  ( $T_{2,i} = 674 \text{ K}$ ) :**  $K_2^0 = 1$ . La décomposition de  $\text{MgCO}_3$  commence significativement. La pression partielle d'équilibre de  $\text{CO}_2$  pour (2) atteint  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ .  **$\text{MgCO}_3$  se décompose en premier.**
- **À environ  $843^\circ\text{C}$  ( $T_{1,i} = 1116 \text{ K}$ ) :**  $K_1^0 = 1$ . C'est au tour de  $\text{CaCO}_3$  de se décomposer significativement.

**Les deux équilibres ne peuvent pas être simultanés à  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ ,** car ils requièrent la même pression partielle de  $\text{CO}_2 = P^\circ$ , mais à des températures différentes. Le système est univariant (règle des phases :  $F = C - \varphi + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$  quand les 4 phases sont présentes, donc impossible à pression et température libres).

**b) Deux pertes de masse :**

 Première perte : décomposition de  $\text{MgCO}_3$ .

 Masses molaires :  $M(\text{MgCO}_3) = 24 + 12 + 48 = 84 \text{ g mol}^{-1}$ ,  $M(\text{CO}_2) = 44 \text{ g mol}^{-1}$ .

 Perte de masse par mole de  $\text{MgCO}_3$  :  $\frac{44}{84}$  par rapport à la masse initiale de  $\text{MgCO}_3$ .

 Soit  $x$  la fraction massique de  $\text{MgCO}_3$  dans le mélange. Pour un mélange de masse  $m_0 = 1$  (normalisé) :

$$\frac{\Delta m_1}{m_0} = x \cdot \frac{44}{84} = 0,022$$

$$x = 0,022 \times \frac{84}{44} = 0,022 \times 1,909 \approx 0,042 \approx \mathbf{4,2\%}$$

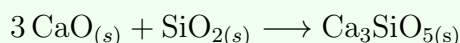
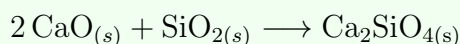
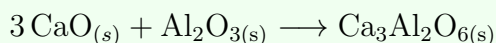
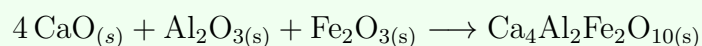
**Commentaire :** La composition massique en  $\text{MgCO}_3$  est d'environ 4,2%, **inférieure à la limite de 6%**. Ce calcaire est donc utilisable dans les cimenteries.

**Remarque / Astuce**
**Méthode :** La première perte de masse correspond uniquement à la décomposition du carbonate qui se décompose à la plus basse température (ici  $\text{MgCO}_3$ ). Le calcul de composition massique fait appel à la stœchiométrie du dégagement de  $\text{CO}_2$ .

## Partie IV.2 — Obtention d'un ciment

**Question 13.**

Les quatre composants du ciment et leurs équations de formation à partir des oxydes :

**Composant A :**  $\text{Ca}_3\text{SiO}_5 = 3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ 

**Composant B :**  $\text{Ca}_2\text{SiO}_4 = 2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ 

**Composant C :**  $\text{Ca}_3\text{Al}_2\text{O}_6 = 3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ 

**Composant D :**  $\text{Ca}_4\text{Al}_2\text{Fe}_2\text{O}_{10} = 4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ 

**Question 14.**

 La matrice  $gob$  relie le vecteur  $oxy = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T$  (fractions massiques en oxydes) au vecteur  $cim = (p_5, p_6, p_7, p_8)^T$  (fractions massiques en composants) via  $oxy = gob \cdot cim$ .

Raisonnement : chaque composant apporte une certaine fraction de chaque oxyde. Par exemple, le composant A ( $M_5 = 228$ ) contient 3 moles de CaO ( $M_1 = 56$ ) par mole de A :

$$\beta_{1j} = \frac{\text{masse d'oxyde } i \text{ dans 1 g de composant } j}{1}$$

Pour CaO (ligne 1) :

$$\beta_{11} = \frac{3M_1}{M_5} = \frac{3 \times 56}{228} \quad (\text{A contient 3 CaO})$$

$$\beta_{12} = \frac{2M_1}{M_6} = \frac{2 \times 56}{172} \quad (\text{B contient 2 CaO})$$

$$\beta_{13} = \frac{3M_1}{M_7} = \frac{3 \times 56}{270} \quad (\text{C contient 3 CaO})$$

$$\beta_{14} = \frac{4M_1}{M_8} = \frac{4 \times 56}{486} \quad (\text{D contient 4 CaO})$$

Pour SiO<sub>2</sub> (ligne 2,  $M_2 = 60$ ) :

$$\beta_{21} = \frac{M_2}{M_5} = \frac{60}{228}, \quad \beta_{22} = \frac{M_2}{M_6} = \frac{60}{172}, \quad \beta_{23} = 0, \quad \beta_{24} = 0$$

Pour Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (ligne 3,  $M_3 = 102$ ) :

$$\beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = 0, \quad \beta_{33} = \frac{M_3}{M_7} = \frac{102}{270}, \quad \beta_{34} = \frac{M_3}{M_8} = \frac{102}{486}$$

Pour Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (ligne 4,  $M_4 = 160$ ) :

$$\beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 0, \quad \beta_{43} = 0, \quad \beta_{44} = \frac{M_4}{M_8} = \frac{160}{486}$$

La ligne 5 du script Python (avec les notations du sujet,  $M4 = 159$  dans le code mais 160 dans le tableau) :

```
gob = np.array([[3*M1/M5, 2*M1/M6, 3*M1/M7, 4*M1/M8],
               [M2/M5,  M2/M6,  0,          0          ],
               [0,      0,      M3/M7,    M3/M8    ],
               [0,      0,      0,          M4/M8    ]])
```

### Remarque / Astuce

**Astuce Python/Linéaire :** La relation  $oxy = gob \times cim$  est un système linéaire. La ligne 6 calcule  $bog = gob^{-1}$ , et la ligne 7 calcule  $cim = bog \times oxy = gob^{-1} \times oxy$ , ce qui résout le système : connaissant la composition en oxydes, on retrouve la composition en composants ciment.

### Question 15.

Pour une mole de chaque composant réagissant avec  $n_e$  moles d'eau ( $n_e = 3 + 2 + 6 + 10 = 21$  moles d'eau au total par mole de chaque composant), la masse d'eau par mole de ciment est :

$$m_e = (3p_5/M_5 + 2p_6/M_6 + 6p_7/M_7 + 10p_8/M_8) \times M_0$$

Mais le rapport demandé est :

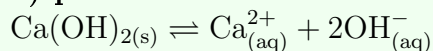
$$r = \frac{m_e}{m_c} = \frac{M_0(3p_5/M_5 + 2p_6/M_6 + 6p_7/M_7 + 10p_8/M_8)}{p_5 + p_6 + p_7 + p_8}$$

et puisque  $p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1$  (fractions massiques), et  $M_0 = 18 \text{ g mol}^{-1}$  :

$$r = 18 \left( \frac{3p_5}{M_5} + \frac{2p_6}{M_6} + \frac{6p_7}{M_7} + \frac{10p_8}{M_8} \right)$$

### Question 16.

**a) pH de la solution saturée en  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  :**



Le produit de solubilité :  $K_s = [\text{Ca}^{2+}][\text{OH}^-]^2 = 10^{-5,2}$

Soit  $s$  la solubilité molaire :  $[\text{Ca}^{2+}] = s$ ,  $[\text{OH}^-] = 2s$ .

$$4s^3 = 10^{-5,2} \implies s^3 = \frac{10^{-5,2}}{4} = \frac{10^{-5,2}}{10^{0,6}} = 10^{-5,8}$$

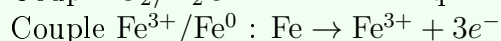
$$s = 10^{-5,8/3} = 10^{-1,93} \approx 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 2s \approx 2,4 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$$

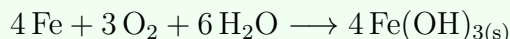
$$\text{pOH} = -\log(2,4 \times 10^{-2}) \approx 1,62 \implies \text{pH} = 14 - 1,62 \approx \mathbf{12,4}$$

Le béton est donc fortement **basique** ( $\text{pH} \approx 12,4$ ).

**b) Oxydation du fer en milieu basique :**



En combinant (3 fois la réduction + 4 fois l'oxydation, équilibré en électrons  $\times 12$  total) :



(ou  $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot x\text{H}_2\text{O}$ , la rouille).

**Passivation** : En milieu très basique ( $\text{pH} > 9$ ), le fer se recouvre d'une couche adhérente d'oxydes/hydroxydes imperméable ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) qui **protège** le métal sous-jacent de toute oxydation ultérieure. C'est la **passivation** : la couche passive isole le métal de l'oxydant.

**c) En milieu acide** : Le pH s'abaisse (en cas de carbonatation du béton par le  $\text{CO}_2$  atmosphérique qui consomme les  $\text{OH}^-$ ). En dessous de  $\text{pH} \approx 9$ , la couche passive se dissout, le fer redevient actif et se corrode :  $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2e^-$ . La corrosion s'emballe, les barres de fer se dilatent et fissurent le béton. C'est le problème du **béton carbonaté**.

### Remarque / Astuce

**Point clé du béton :** Le pH élevé assure la passivation des armatures. Tout ce qui abaisse le pH (carbonatation, pluies acides, chlorures) détruit la passivation. La durabilité du béton armé dépend du maintien de ce pH basique.

### Question 17.

Le minéral K est  $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot x\text{SiO}_2 \cdot y\text{H}_2\text{O}$ .

Masses molaires :  $\text{Al}_2\text{O}_3 = 102$ ,  $\text{SiO}_2 = 60$ ,  $\text{H}_2\text{O} = 18$ . Masse molaire de K :  $M_K = 102 + 60x + 18y$ .

**Équation 1** (perte de masse en eau à  $550^\circ\text{C} = 14,0\%$ ) :

La perte de masse correspond à la déshydratation :  $y$  moles d'eau perdues par mole de K.

$$\frac{18y}{102 + 60x + 18y} = 0,140$$

**Équation 2** (teneur en  $\text{SiO}_2 = 46,5\%$ ) :

$$\frac{60x}{102 + 60x + 18y} = 0,465$$

Ces deux équations permettent de déterminer  $x$  et  $y$  (résolution par substitution, sans calcul ici comme demandé).

*Vérification de cohérence :* Le minéral kaolinite a pour formule  $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4 = \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ , soit  $x = 2, y = 2$ . Testons :  $M_K = 102 + 120 + 36 = 258$ ; perte =  $36/258 = 13,9\% \approx 14\%$  ;  $\text{SiO}_2 = 120/258 = 46,5\%$  . C'est bien la **kaolinite**.

### Remarque / Astuce

**Astuce :** Reconnaître la kaolinite  $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$  est un plus, mais la méthode générale (deux équations, deux inconnues) est suffisante. La formule  $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  correspond à  $x = 2, y = 2$ .

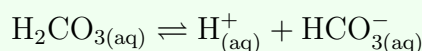
## Partie IV.3 — Les pluies acides

### Question 18.

**a) Deux équilibres acido-basiques de  $\text{H}_2\text{CO}_3$  (diacide) :**

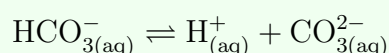
Le  $\text{CO}_2$  dissous dans l'eau forme  $(\text{CO}_{2,\text{aq}}, \text{H}_2\text{O})$ , modélisé par  $\text{H}_2\text{CO}_{3(\text{aq})}$  :

**Équilibre 1 (première acidité) :**



$$Q_{a1} = \frac{[\text{H}^+][\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}$$

**Équilibre 2 (deuxième acidité) :**



$$Q_{a2} = \frac{[\text{H}^+][\text{CO}_3^{2-}]}{[\text{HCO}_3^-]}$$

**b) Attribution des courbes (Figure 4) :**

- Courbe (1) : espèce majoritaire à bas pH  $\rightarrow \text{CO}_{2,\text{aq}}$  (ou  $\text{H}_2\text{CO}_3$ ), acide. Présente entre pH 0 et  $\text{p}K_{a1}$ .
- Courbe (2) : espèce intermédiaire, maximale entre  $\text{p}K_{a1}$  et  $\text{p}K_{a2} \rightarrow \text{HCO}_3^-$ .
- Courbe (3) : espèce majoritaire à pH élevé  $\rightarrow \text{CO}_3^{2-}$ , base conjuguée.

**c) Valeurs de  $K_{a1}$  et  $K_{a2}$  :**

À l'intersection de (1) et (2) :  $[\text{H}_2\text{CO}_3] = [\text{HCO}_3^-]$ , donc  $\text{pH} = \text{p}K_{a1}$ . Lecture graphique :  $\text{p}K_{a1} \approx 6,4$ , soit  $K_{a1} \approx 4 \times 10^{-7}$ .

À l'intersection de (2) et (3) :  $[\text{HCO}_3^-] = [\text{CO}_3^{2-}]$ , donc  $\text{pH} = \text{p}K_{a2}$ . Lecture graphique :  $\text{p}K_{a2} \approx 10,3$ , soit  $K_{a2} \approx 5 \times 10^{-11}$ .

**Remarque / Astuce**

**Méthode de lecture des diagrammes de distribution :** Les intersections des courbes donnent directement les  $\text{p}K_a$ . À  $\text{pH} = \text{p}K_{a1}$ , les deux premières espèces sont à 50% chacune. À  $\text{pH} = (\text{p}K_{a1} + \text{p}K_{a2})/2$ ,  $\text{HCO}_3^-$  est maximal.

**Question 19.**
**Concentration en  $\text{CO}_2$  dissous constante :**

L'équilibre de dissolution est  $\text{CO}_{2(\text{g})} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{CO}_{2,\text{aq}}, \text{H}_2\text{O})$  avec  $K^0(298\text{K}) = 3,1 \times 10^{-2}$ .

$$K^0 = \frac{[\text{CO}_{2,\text{aq}}]}{x_{\text{CO}_2} \cdot P/P^0}$$

(en supposant une solution diluée). Avec  $x_{\text{CO}_2} = 3,4 \times 10^{-4}$  et  $P = P^0 = 1$  bar :

$$c = [\text{CO}_{2,\text{aq}}] = K^0 \cdot x_{\text{CO}_2} = 3,1 \times 10^{-2} \times 3,4 \times 10^{-4} \approx 1,05 \times 10^{-5} \text{ mol L}^{-1}$$

La concentration  $c$  est fixée par la pression partielle de  $\text{CO}_2$  dans l'air (constante à  $T, P$  fixés). C'est la **loi de Henry**.

**pH de la pluie acide :**

La première acidité de  $\text{H}_2\text{CO}_3$  domine (car  $\text{p}K_{a1} = 6,4$  et  $\text{p}K_{a2} = 10,3$ ).

En notant  $c = 1,05 \times 10^{-5} \text{ mol L}^{-1}$  et en supposant  $[\text{H}^+] \ll c$  :

$$[\text{H}^+] = \sqrt{K_{a1} \cdot c} = \sqrt{10^{-6,4} \times 1,05 \times 10^{-5}}$$

$$\log[\text{H}^+] = \frac{1}{2}(-6,4 - 4,98) = \frac{-11,38}{2} = -5,69$$

$$\text{pH} \approx 5,7$$

### Concentrations de toutes les espèces :

$$[\text{CO}_{2,\text{aq}}] = c \approx 1,05 \times 10^{-5} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-]^{-1} \cdot K_e = 10^{-5,7} \approx 2 \times 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{HCO}_3^-] = [\text{H}^+] \approx 2 \times 10^{-6} \text{ mol L}^{-1} \quad (\text{électroneutralité, } [\text{CO}_3^{2-}] \ll)$$

$$[\text{CO}_3^{2-}] = K_{a2} \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-10,3} \times 2 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} = 10^{-10,3} \approx 5 \times 10^{-11} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = K_e / [\text{H}^+] = 10^{-14} / 10^{-5,7} = 10^{-8,3} \approx 5 \times 10^{-9} \text{ mol L}^{-1}$$

**Conclusion :** La pluie naturelle a un  $\text{pH} \approx 5,7$  (légèrement acide), ce qui est normal sans pollution. Les pluies acides liées à  $\text{SO}_2/\text{NO}_x$  ont un  $\text{pH} < 5$ .

### Remarque / Astuce

**Loi de Henry :** à température et pression fixées, la concentration d'un gaz dissous est proportionnelle à sa fraction molaire dans le gaz (ou à sa pression partielle). C'est pourquoi  $c$  est constante ici : la pression partielle de  $\text{CO}_2$  atmosphérique est constante.

## Partie V — Propriétés thermodynamiques de la Terre

### V.1 — Conductivité thermique d'une roche

**Question 20.** La résistance thermique d'un conducteur de conductivité  $\lambda$ , section  $s$ , longueur  $l$  traversé par un flux uniforme perpendiculaire :

$$R_{th} = \frac{l}{\lambda s}, \quad \Delta T = R_{th} \cdot \Phi \quad (\text{analogue à } U = RI)$$

**Question 21.**

En régime permanent et en géométrie plane, le flux thermique  $\Phi$  est le même à travers toutes les couches (conservation de l'énergie). Le système est une association de résistances thermiques en série :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = \frac{R_{th,\text{roche}} + R_{th,c1} + R_{th,c2}}{R_{th,\text{laiton+laiton}}}$$

Plus précisément, avec la résistance totale :

$$\Phi = \frac{T_c - T_f}{R_{th,\text{total}}} \quad \text{et} \quad T_1 - T_2 = \Phi \cdot R_{th,\text{roche+contacts}}$$

On obtient après calcul :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_c - T_1} = \frac{\lambda_l}{l} \left( \frac{d}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$$

Pour s'affranchir des résistances de contact ( $e_1/\lambda_1$  et  $e_2/\lambda_2$  inconnues) : on réalise **plusieurs mesures avec des roches de différentes épaisseurs  $d$** . En traçant  $\frac{T_1 - T_2}{T_c - T_1}$  en fonction de  $d$ , on obtient une droite dont la pente est  $\lambda_l/(l\lambda)$ , permettant de déterminer  $\lambda$  indépendamment des contacts.

## V.2 — Évolution de la température à l'intérieur de la Terre

### Question 22.

a) Énergie gravitationnelle de  $m$  en présence de la sphère de rayon  $r$ , masse  $M = \mu \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$  :

$$dE_{pG}(r) = -\frac{GM dm}{r} = -\frac{G\mu \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot dm}{r} = -\frac{4\pi G\mu}{3} r^2 dm$$

b) Formation de la sphère par couches depuis l'infini. Chaque couche  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , masse  $dm = \mu \cdot 4\pi r^2 dr$  :

$$E_{pG}(R) = \int_0^R -\frac{4\pi G\mu}{3} r^2 \cdot \mu \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{16\pi^2 G\mu^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{16\pi^2 G\mu^2}{3} \cdot \frac{R^5}{5}$$

Avec  $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu$  :

$$E_{pG}(R) = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Le signe  $-$  traduit que l'énergie de la sphère est inférieure à celle des composants dispersés à l'infini : la sphère est un état **lié**, plus stable.

### Question 23.

Si toute l'énergie gravitationnelle se convertit en chaleur (hypothèse de Kelvin-Helmholtz) :

$$M_T C T_{eq} = \frac{3GM_T^2}{5R_T}$$

$$T_{eq} = \frac{3GM_T}{5R_T C}$$

Application numérique :

$$T_{eq} = \frac{3 \times 6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{5 \times 6,4 \times 10^6 \times 10^3}$$

Numérateur :  $3 \times 6,7 \times 6,0 \times 10^{-11+24} = 120,6 \times 10^{13} \approx 1,2 \times 10^{15}$ . Dénominateur :  $5 \times 6,4 \times 10^9 = 3,2 \times 10^{10}$ .

$$T_{eq} \approx \frac{1,2 \times 10^{15}}{3,2 \times 10^{10}} \approx 3,75 \times 10^4 \text{ K}$$

**Commentaire :** Cette valeur ( $\sim 40\,000$  K) est très supérieure à la température réelle du noyau terrestre ( $\sim 6\,000$  K). La Terre a perdu une grande partie de son énergie gravitationnelle par rayonnement. De plus, la radioactivité contribue à maintenir la chaleur interne actuelle.

### Question 24.

La décroissance radioactive suit :  $\frac{dN_i}{dt} = -\frac{\ln 2}{\tau_i} N_i$ , équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$N_i(t) = N_{i0} e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i} t} = N_{i0} \cdot 2^{-t/\tau_i}$$

### Question 25.

La puissance volumique pour l'élément  $X_i$  dans une roche de masse volumique  $\mu$  :  
 Nombre de noyaux par unité de volume :  $N_i = \frac{x_i \mu}{M_i} N_A$  (où  $x_i$  = fraction massique,  $M_i$  = masse molaire en kg/mol).

L'énergie dégagée par désintégration est  $\varepsilon_i$  (J/noyau). Le taux de désintégration par unité de volume est  $|dN_i/dt| = \frac{\ln 2}{\tau_i} N_i$ .

$$p_{v,i}(t) = \varepsilon_i \cdot \frac{\ln 2}{\tau_i} \cdot N_i(t) = \varepsilon_i \cdot \frac{\ln 2}{\tau_i} \cdot \frac{x_i \mu N_A}{M_i} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i} t}$$

Puissance totale :

$$p_v(t) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \cdot \frac{\ln 2}{\tau_i} \cdot \frac{x_i \mu N_A}{M_i} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau_i} t}$$

**Question 26.** La puissance volumique est une **somme de trois exponentielles décroissantes** avec des périodes très différentes ( $\tau_1 = 4,46$ ,  $\tau_2 = 14,0$ ,  $\tau_3 = 1,26$  milliards d'années). À court terme, c'est l'isotope à courte période ( $^{40}\text{K}$ ) qui domine et décroît vite. À long terme, ce sont les isotopes à longue période ( $^{232}\text{Th}$ ). La date  $t_{1/2}$  où  $p_v$  est réduite de moitié se lit sur le graphe et vaut environ  $t_{1/2} \approx 3 \times 10^9$  ans (dominée par  $^{238}\text{U}$  et  $^{232}\text{Th}$ ).

**Question 27.** Par symétrie sphérique de la Terre homogène, le flux thermique est radial :  $\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_r$ .

**Question 28.** – **Question 29.**

Le bilan thermique d'une coquille sphérique d'épaisseur  $dr$  :  
 $\mu C \cdot 4\pi r^2 dr \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt =$  chaleur reçue par conduction + chaleur produite par radioactivité.  
 L'équation de la chaleur en symétrie sphérique avec source  $p'_v$  :

$$\mu C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + p'_v$$

En régime permanent ( $\partial T / \partial t = 0$ ) :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p'_v r^2}{\lambda}$$

En intégrant :  $r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{p'_v}{3\lambda} r^3 + C_1$ .

Condition :  $T$  finie au centre  $\implies C_1 = 0$ . Donc :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{p'_v}{3\lambda} r$$

En intégrant avec  $T(R_T) = T_s = 298 \text{ K}$  :

$$T(r) = T_s + \frac{p'_v}{6\lambda} (R_T^2 - r^2)$$

Puissance surfacique :

$$j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{p'_v}{3} r \implies j(R_T) = \frac{p'_v}{3} R_T$$

Avec  $j(R_T) = 70 \text{ mW m}^{-2}$  et  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 3 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$  :

$$p'_v = \frac{3 \times 70 \times 10^{-3}}{6,4 \times 10^6} \approx 3,3 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-3} = 33 \text{ nW m}^{-3}$$

**Commentaire (Q26) :** Cette valeur actuelle est cohérente avec le graphe de la figure 6, qui donne  $p_v \sim 30\text{--}40 \text{ nW m}^{-3}$  pour l'époque actuelle ( $t \approx 4,5 \times 10^9 \text{ ans}$ ).

## Partie VI — Le champ magnétique terrestre

### Question 30.

Le dipôle magnétique  $\vec{m} = -m\vec{u}_z$  est placé en O. En coordonnées sphériques,  $\vec{r} = r\vec{u}_r$ ,  $\vec{m} \cdot \vec{r} = -mr \cos \theta$  (car  $\vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = \cos \theta$ ),  $|\vec{r}|^2 = r^2$ .

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

En développant (avec  $\vec{m} = -m\vec{u}_z = -m(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$ ) :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2m \cos \theta}{r^3} \cdot (-1) \cdot (-1) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \cdot \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

Attention au signe de  $\vec{m} = -m\vec{u}_z$  :

$$B_r = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \cdot 2 \cos \theta, \quad B_\theta = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad B_\varphi = 0$$

### Question 31.

Une ligne de champ satisfait  $\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$  :

$$\frac{dr}{-2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{-\sin \theta} \implies \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

$$\ln r = 2 \ln \sin \theta + \text{const} \implies r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta$$

où  $r_0$  est la distance à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ). Les lignes de champ sont des courbes en « boucles » partant d'un pôle, s'éloignant jusqu'à  $r_0$  à l'équateur et revenant à l'autre pôle.

### Question 32.

Latitude  $\Lambda = \pi/2 - \theta$  (colatitude  $\theta = \pi/2 - \Lambda$ ).

**Composante horizontale**  $B_h$  (vers le nord géographique) :  $B_h = -B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3} \sin \theta =$

$$\frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3} \cos \Lambda$$

**Composante verticale**  $B_v$  (vers le bas) :  $B_v = -B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3} \cdot 2 \cos \theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3} \cdot 2 \sin \Lambda$

### Question 33.

À l'équateur :  $\Lambda = 0$ ,  $B_h = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_T^3}$  et  $B_v = 0$ . L'intensité totale  $B = B_h = 2,6 \times 10^{-5}$  T.

$$m = \frac{4\pi R_T^3 B}{\mu_0} = \frac{4\pi \times (6,4 \times 10^6)^3 \times 2,6 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7}}$$

$$m = \frac{(6,4 \times 10^6)^3 \times 2,6 \times 10^{-5}}{10^{-7}}$$

$(6,4)^3 = 262$ ,  $(10^6)^3 = 10^{18}$ , donc  $(6,4 \times 10^6)^3 \approx 2,62 \times 10^{20}$ .

$$m = \frac{2,62 \times 10^{20} \times 2,6 \times 10^{-5}}{10^{-7}} = \frac{6,8 \times 10^{15}}{10^{-7}} = 6,8 \times 10^{22} \text{ A m}^2$$

$$m \approx 7 \times 10^{22} \text{ A m}^2$$

### Remarque / Astuce

La valeur trouvée ( $\sim 8 \times 10^{22}$  A m<sup>2</sup>) est proche de la valeur réelle du moment dipolaire terrestre ( $8 \times 10^{22}$  A m<sup>2</sup>), ce qui valide le modèle dipolaire.

---

**FIN DE LA CORRECTION**

CCINP 2026 — Physique Chimie MP

---