

Conversion de puissance électromécanique

Ce problème se propose d'aborder quelques aspects de la conversion de puissance électromécanique. On envisage successivement un moteur électrostatique à capacité variable (partie I) et un moteur électromagnétique monophasé à inductance variable (parties II et III). On envisage ensuite une comparaison de ces deux types de convertisseurs ainsi que la question de la réduction d'échelle (« *downsizing* ») dans le but de réaliser des micromoteurs électrostatiques ou électromagnétiques (partie IV).

Les parties II et III sont principalement indépendantes de la partie I. Les résultats (issus des parties I, II et III) utiles à la résolution de la partie IV sont fournis. Les applications numériques sont à réaliser avec un seul chiffre significatif. On donne $\epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12} \text{ USI}$, $\mu_0 \approx 1 \times 10^{-6} \text{ USI}$ et $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$T \cdot s^{-1} \cdot A^{-1}$

I Moteur électrostatique à capacité variable

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures planes parallèles de surface S séparées par de l'air (assimilé au vide) sur une distance d . On suppose que $d \ll \sqrt{S}$ de sorte que l'on peut négliger les effets de bord. Le condensateur est soumis à une tension u , supposée constante.

- – 1. Faire un schéma du condensateur en faisant apparaître la tension u à ses bornes, les charges q et $-q$ portées par ses armatures ainsi que le champ électrique $\vec{E}$ qui règne en son sein. On supposera $u > 0$ et $q > 0$ pour les besoins de ce schéma mais u et q seront a priori des grandeurs algébriques dans toute la partie I.
- – 2. Proposer une définition de la capacité C du condensateur. Exprimer, en détaillant votre raisonnement, le champ électrique $\vec{E}$ en fonction notamment de la charge q .
En déduire l'expression de la capacité C du condensateur plan sans effets de bord, en fonction notamment de S et d .

$\epsilon_0 S$
 e

On considère maintenant le moteur électrostatique représenté sur la figure 1 et constitué d'un condensateur de capacité variable $C(\theta_r)$.

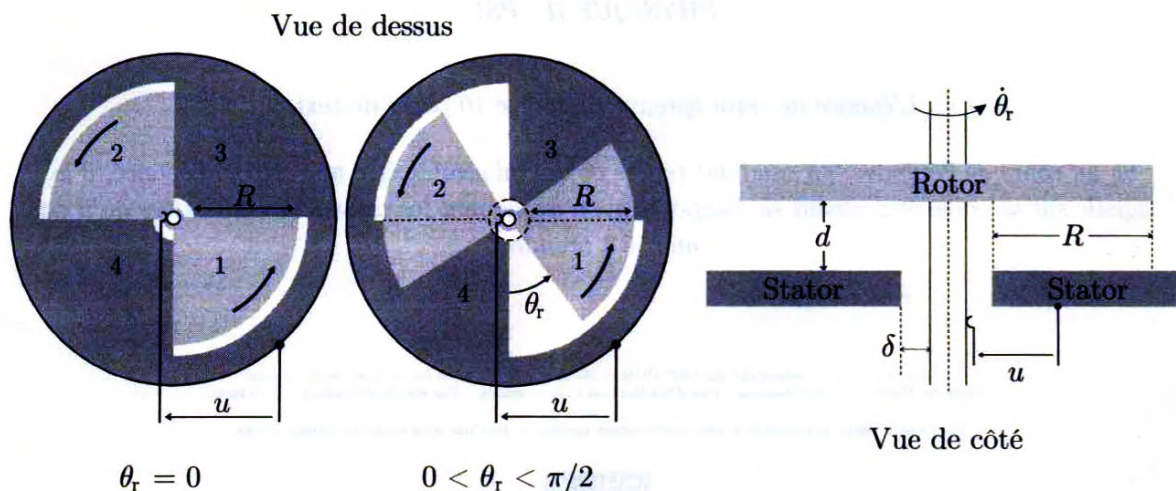


FIGURE 1 – Moteur électrostatique : vue de dessus pour 2 positions du rotor (à gauche) et vue de côté à droite.

Il est constitué d'un stator (fixe, par définition) conducteur plan constitué des deux électrodes (3) et (4), formant chacune un quart de disque, et d'un rotor (en rotation autour de son axe

de symétrie, perpendiculaire au plan de la figure vue de dessus) conducteur plan constitué des deux électrodes (1) et (2) formant également chacune un quart de disque. La position angulaire du rotor est repérée par l'angle θ_r . La distance entre les électrodes statoriques et rotoriques est notée d et le rayon « utile » des électrodes est noté R . On suppose $d \ll R$ et $\delta \ll R$. L'ensemble est alimenté par une source de tension u grâce à un contact glissant pratiqué sur l'axe conducteur du rotor.

- – 3. Pour quelles valeurs respectives de θ_r la capacité $C(\theta_r)$ du condensateur atteint-elle sa valeur maximale $C_{\max}$ et sa valeur minimale $C_{\min}$?

En négligeant les effets de bord, exprimer $C_{\max}$ en fonction notamment de R et d .

- – 4. Proposer une expression de la capacité $C(\theta_r)$ du condensateur sur l'intervalle $[0, \pi]$. On exprimera $C(\theta_r)$ en fonction de $C_{\max}$, $C_{\min}$ et de θ_r .

Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ en précisant sa période.

On admet que le couple subi par le rotor est donné par l'expression : $\Gamma = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{el}}}{\partial \theta_r} \right|_u$ où $\mathcal{E}_{\text{el}}$ désigne l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur.

- – 5. Donner la relation liant le couple Γ et la dérivée de C par rapport à θ_r .

Que doit vérifier le couple moyen $\langle \Gamma \rangle$ si l'on veut réaliser un moteur ?

Peut-on alimenter le système par une tension constante ?

On envisage d'alimenter le moteur électrostatique par une tension en créneaux oscillant entre les valeurs $u = 0$ et $u = U > 0$.

- – 6. Préciser sur quels intervalles angulaires il convient d'appliquer la tension U .

Tracer la courbe des variations de $\Gamma(\theta_r)$ et donner l'expression du couple moyen $\langle \Gamma \rangle$.

- – 7. Le moteur fonctionnant en régime permanent de rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}_r$, quelle est la relation entre la pulsation ω du fondamental de la tension en créneaux $u(t)$ et Ω ?

- – 8. En déduire que la puissance mécanique moyenne du moteur s'écrit sous la forme $\langle \mathcal{P}_{\text{m,el}} \rangle = \frac{1}{2} f U^2 (C_{\max} - C_{\min})$ où f désigne la fréquence de la tension en créneaux $u(t)$.

On suppose maintenant que le rotor et le stator sont constitués de p paires d'électrodes formant des portions de disque d'angle au sommet $\pi/2p$ régulièrement espacés d'un angle $\pi/2p$. Le cas $p = 2$ est illustré sur la figure 2-Ⓐ.

- – 9. Que devient la période de la fonction $C(\theta_r)$?

Sur quels intervalles angulaires doit-on maintenant appliquer la tension U ?

Que devient le couple moyen $\langle \Gamma \rangle$?

Quelle relation la pulsation ω du fondamental de la tension en créneaux $u(t)$ doit-elle maintenant vérifier par rapport à Ω , toujours supposée constante ?

Que peut-on dire de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ du moteur ?

On cherche maintenant à augmenter la puissance du moteur. Pour cela, on envisage la réalisation conçue et fabriquée dans l'usine Philips de Tilburg (Pays-Bas) dans les années 1960 illustrée sur la figure 2-Ⓑ.

Le rotor est constitué de $N = 14$ plaques conductrices d'épaisseur $300 \mu\text{m}$ intercalées entre les $N + 1 = 15$ plaques conductrices constituant le stator (de même épaisseur, soit $300 \mu\text{m}$). Sur cet exemple, le nombre de paires d'électrodes « à chaque étage » vaut $p = 3$. La distance entre deux étages statorique et rotorique plus proches voisins vaut $d = 150 \mu\text{m}$. Le rayon utile des électrodes vaut $R = 10 \text{ mm}$.

La figure 2-Ⓒ est une vue de côté du schéma de principe du moteur Philips destinée à faciliter la compréhension du dispositif, pour des raisons pratiques, il a été dessiné pour $N = 7$.

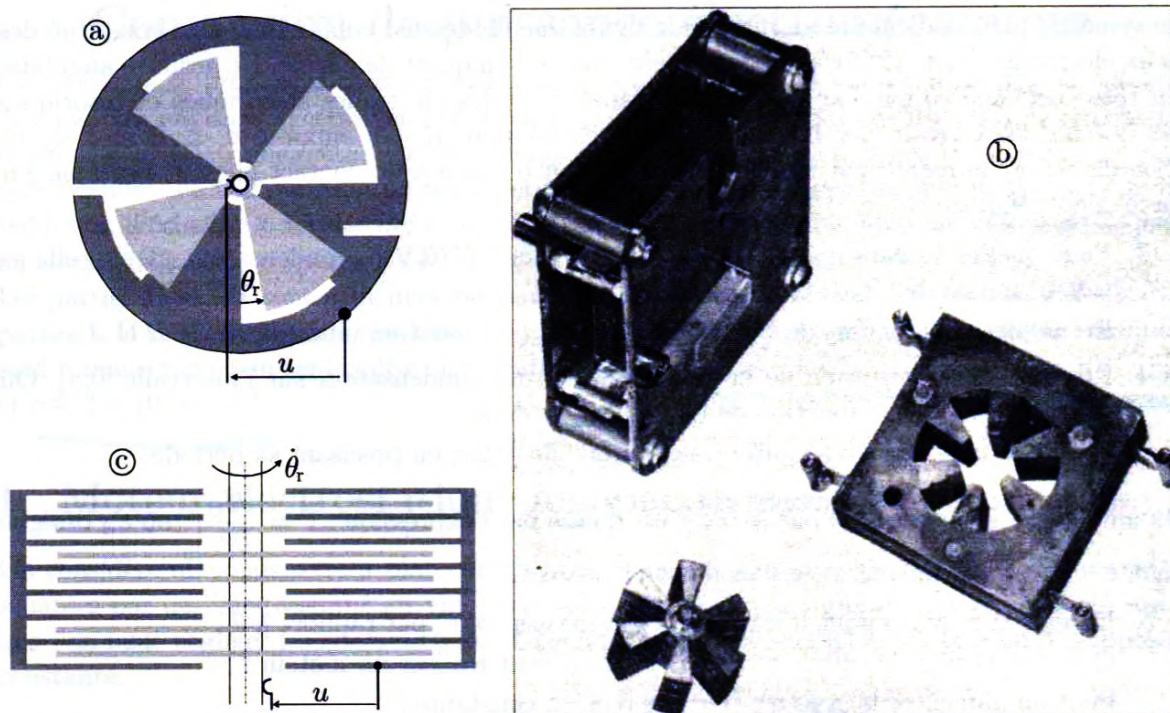


FIGURE 2 – (a) : Schéma d'un moteur électrostatique à 2 paires d'ailettes. (b) : Une réalisation technologique avec 3 paires d'ailettes de la société Philips (Illustration tirée de *Electrostatic Motors*, B. Bollée, Philips Technical Review, vol. 30, 1969, n°6/7). (c) : Schéma d'une vue de coté du moteur électrostatique « multicouches » avec $N = 7$.

- – 10. Quelle est la relation entre la capacité $C_N(\theta_r)$ de cette structure à N couches et la capacité $C(\theta_r)$ de la structure à une couche considérée jusqu'à présent ? On justifiera la réponse. Que devient la puissance moyenne développée par le moteur électrostatique ? Évaluer numériquement $C_{N,\max}$ et la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ développée par le moteur dans le cas $N = 14$. On supposera que le moteur est alimenté par un créneau positif d'amplitude $U = 100 \text{ V}$, de rapport cyclique 50 % et de fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. Commenter.

Un problème inhérent au moteur électrostatique étudié est la présence d'un contact glissant au niveau de l'axe du rotor qui provoque inévitablement de l'usure et des pertes par frottement. Pour pallier ce problème, on envisage la solution suivante : le rotor est isolé (et donc il n'est connecté à rien). Le stator est constitué de deux demi-stators isolés entre eux. La tension u est appliquée entre ces deux demi-stators. Le schéma de principe d'un tel moteur est représenté sur la figure 3.

- – 11. Proposer un schéma électrique équivalent au moteur ainsi câblé.

À quelle condition sur l'amplitude U de la tension en créneaux $u(t)$ la puissance moyenne développée par cette nouvelle structure est-elle inchangée par rapport au système initial ?

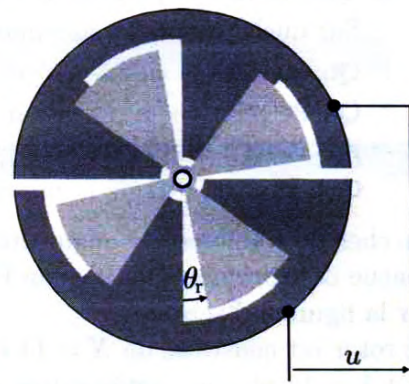


FIGURE 3 – Principe du moteur électrostatique « brushless »

II Moteur électromagnétique monophasé à inductance variable

On aborde maintenant l'étude d'un convertisseur électromécanique magnétique à inductance variable. Celui-ci est constitué d'un stator cylindrique creux en fer doux présentant deux pôles saillants à l'intérieur duquel tourne un rotor également en fer doux. Le stator est pourvu de deux enroulements comportant chacun N spires bobinées sur les deux pôles saillants. Ces deux enroulements sont associés en série et sont donc parcourus par le même courant $i(t)$: ils ne forment donc en fait qu'un seul circuit (la machine est donc monophasée). La position angulaire du rotor est repérée par l'angle θ_r . Le schéma de principe de la machine à inductance variable pour un angle θ_r quelconque est représenté sur la partie gauche de la figure 4.

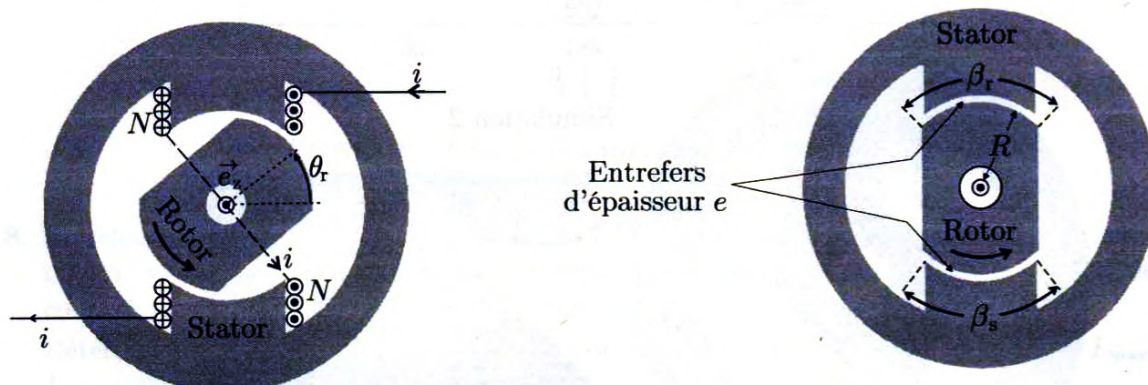


FIGURE 4 – Principe du moteur à inductance variable monophasé et définition des notations utilisées

On voit sur la figure 4 que le rotor et le stator sont séparés l'un de l'autre par deux minces zones d'air, nommées entrefers, d'épaisseur e . Le volume global de l'entrefer dépend de la position angulaire du rotor.

La figure 5 propose les résultats de simulations obtenus avec le logiciel FEMM permettant de visualiser les lignes de champ du champ magnétique $\vec{B}$ (dans les deux cas) ainsi que l'intensité $\|\vec{B}\|$ du champ magnétique et l'intensité $\|\vec{H}\|$ de l'excitation magnétique. Les couleurs claires correspondent aux zones de valeur minimales, les couleurs foncées correspondent aux zones de valeurs maximales.

- – 12. Laquelle des deux simulations 1 ou 2 donne-t-elle l'intensité $\|\vec{B}\|$ du champ magnétique ?
On justifiera la réponse.
- – 13. Justifier qu'il est légitime de négliger, dans l'air, le champ magnétique en dehors des minces entrefers d'épaisseur e .
- – 14. On suppose dorénavant la perméabilité magnétique du rotor et du stator infinies. Montrer que l'intensité du champ magnétique en un point quelconque des deux entrefers est donnée par la relation $B_a = \mu_0 Ni/e$

On note R le rayon de la paroi circulaire du rotor (figure 4) et ℓ la longueur du rotor et du stator, mesurée selon l'axe de rotation. On suppose $\ell \gg R \gg e$. On introduit par ailleurs les deux angles β_r et β_s définis sur la partie droite de la figure 4. On suppose dans un premier temps que $\beta_r = \pi/2 + 2\epsilon$ et $\beta_s = \pi/2 - \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$ rad.

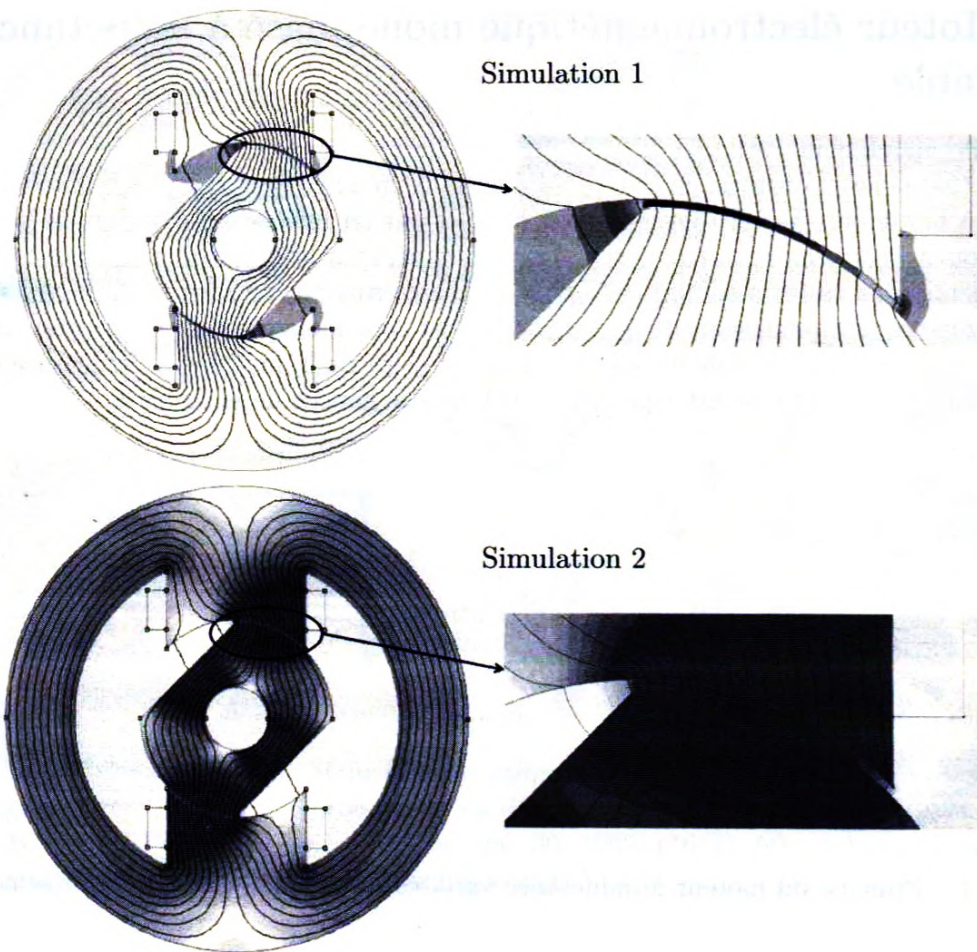


FIGURE 5 – Représentation graphique de simulations sur le logiciel FEMM

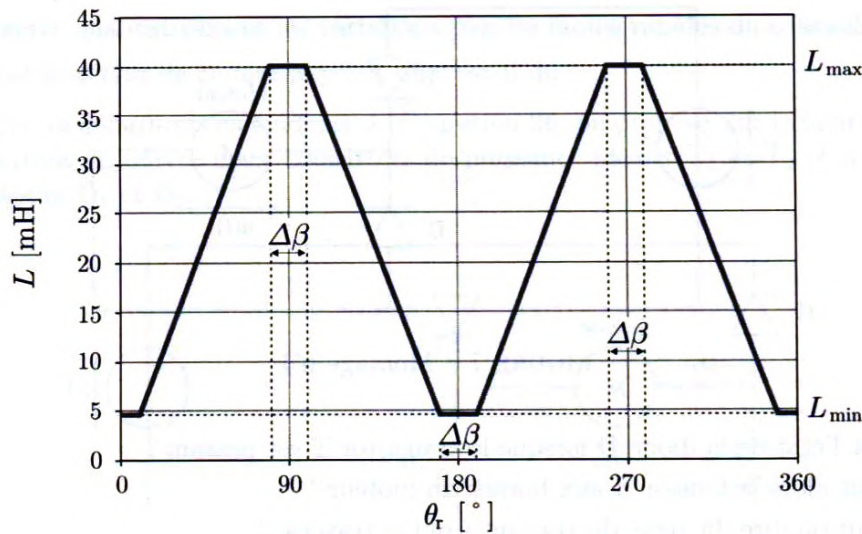
- – 15. Dessiner tout d'abord l'allure de l'entrefer pour $\theta_r = k\pi$ si $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression simplifiée de son volume total (minimal dans cas précis) en fonction de R , ℓ , e et ϵ .
Dessiner maintenant l'allure de l'entrefer pour $\theta_r = (2k+1)\pi/2$ si $k \in \mathbb{N}$, déterminer alors l'expression simplifiée de son volume total (maximal dans cas précis) en fonction de e , R , et ℓ .
- – 16. Proposer une définition énergétique de l'inductance du système.
Déduire des questions 14 et 15 les valeurs minimale $L_{\min}$ et maximale $L_{\max}$ de l'inductance.
Comment varie l'inductance entre ces deux valeurs extrêmes ?

En pratique, en choisissant convenablement ϵ et en prenant compte les effets de bord, on obtient une courbe des variations de $L(\theta_r)$ symétrique semblable à celle représentée sur la figure 6 pour laquelle l'angle $\Delta\beta \ll \beta_r$ de saturation est identique pour les valeurs maximales et minimales.

On rappelle que le couple subi par le rotor est donné par l'expression $\Gamma = \left. \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{ma}}}{\partial \theta_r} \right|_i$ où $\mathcal{E}_{\text{ma}}$ désigne l'énergie magnétique stockée dans le système.

- – 17. Exprimer le couple Γ en fonction de L et i .
Peut-on alimenter ce système par un courant constant si l'on veut réaliser un moteur ?

On envisage d'alimenter ce moteur par un courant en créneaux oscillant entre les valeurs 0 et $I > 0$.

FIGURE 6 – Courbe des variations de $L(\theta_r)$

- – 18. En reproduisant la courbe des variations de $L(\theta_r)$, préciser sur quels intervalles angulaires il convient d'appliquer le courant I . On représentera sur ce même schéma le créneau de courant ainsi que le couple $\Gamma(\theta_r)$ correspondant.
Déterminer avec cette alimentation l'expression du couple moyen $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de $L_{\max}$, $L_{\min}$ et I .
- – 19. Le moteur fonctionnant en régime permanent de rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}_r$, quelle relation la pulsation ω du fondamental du courant en créneaux $i(t)$ doit-elle vérifier par rapport à Ω ?
- – 20. En déduire que la puissance mécanique moyenne du moteur se met sous la forme $\langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle = \frac{1}{2} f I^2 (L_{\max} - L_{\min})$ où f désigne la fréquence du courant en créneaux $i(t)$.

III Alimentation électrique du moteur monophasé à inductance variable.

On cherche maintenant à optimiser l'alimentation électrique du moteur monophasé à inductance variable étudié dans la Partie II.

On suppose que le bobinage parcouru par le courant $i(t)$ présente une résistance interne notée r . On note $u(t)$ la tension régnant aux bornes du moteur, en convention récepteur. On suppose que le courant $i(t)$ est positif ou nul : il ne peut pas changer de signe.

- – 21. Montrer que l'équation différentielle liant la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ se met sous la forme

$$\left[r + \Omega \frac{dL}{d\theta_r} \right] i(\theta_r) + \Omega L(\theta_r) \frac{di}{d\theta_r} = u(\theta_r)$$

dans laquelle on rappellera l'expression de Ω .

On cherche maintenant comment imposer le plus efficacement possible un créneau de courant à partir d'une source de tension continue idéale U_0 .

On envisage pour cela un premier montage, représenté sur la figure 7, mettant en œuvre un transistor T de puissance et une diode D de puissance, tous deux supposés idéaux.

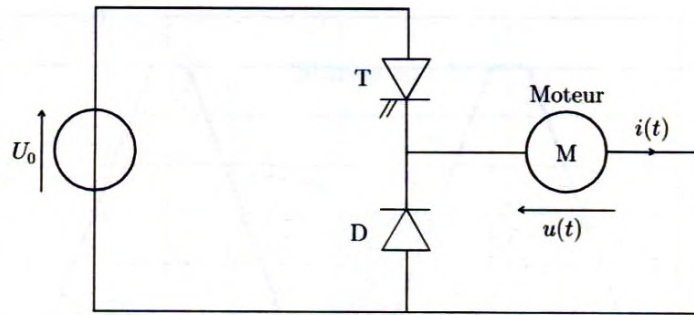


FIGURE 7 – Montage n°1

- – 22. Quel est l'état de la diode D lorsque le transistor T est passant ?
 Que vaut alors la tension u aux bornes du moteur ?
 Que peut-on dire du signe du courant i qui le traverse ?
 Les règles d'interconnexion des sources de tension et de courant sont-elles respectées ? On justifiera la réponse.

- – 23. Justifier qu'au cours de cette phase où T est passant, $\frac{dL}{d\theta_r} = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{\pi/2 - \Delta\beta}$, rapport noté ρ .
 Écrire l'équation différentielle régissant le courant $i(\theta_r)$ au cours de cette phase. On fera intervenir les grandeurs r , ρ , Ω , $L(\theta_r)$ et U_0 .

On ouvre le transistor T à l'instant où $L(\theta_r)$ atteint $L_{\max}$.

- – 24. Quel est alors l'état de la diode D ?

Quelles sont alors les valeurs successives prises par la dérivée $\frac{dL}{d\theta_r}$?

En déduire les équations différentielles successives régissant le courant $i(\theta_r)$ lorsque T est ouvert en distinguant les domaines de variation de θ_r dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\beta}{2}, \pi + \frac{\Delta\beta}{2}]$.

Les équations différentielles déterminées aux questions 23 et 24 pour le montage 1 peuvent être résolues numériquement. Les solutions correspondantes sont représentées schématiquement dans un diagramme synchrone sur la figure 8.

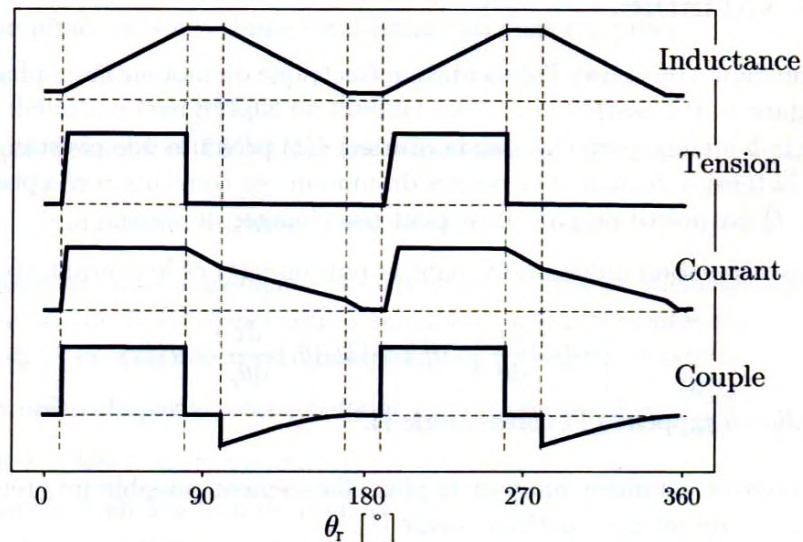


FIGURE 8 – Solutions numériques pour le montage 1.

- – 25. Interpréter qualitativement les variations plus ou moins rapides du courant $i(\theta_r)$
- – 26. Quel est le défaut de ce montage ? À quoi est-il dû ?

Pour remédier au défaut mis en évidence à la question 26, on propose, sur la figure 9, un second montage mettant en œuvre deux transistors de puissance idéaux T_1 et T_2 et deux diodes de puissance idéales D_1 et D_2 .

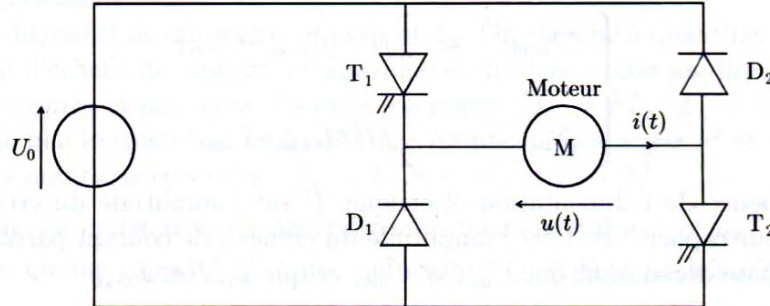


FIGURE 9 – Montage n°2

Sur une période de fonctionnement, on distingue trois phases successives :

- Phase 1 : les deux transistors T_1 et T_2 sont passants ;
- Phase 2 : les deux transistors T_1 et T_2 sont ouverts ;
- Phase 3 : le transistor T_2 est passant tandis que le transistor T_1 est ouvert.

- – 27. Pour chacune des trois phases définies ci-dessus, préciser la valeur de la tension u aux bornes du moteur ainsi que l'état des deux diodes D_1 et D_2 .

Une étude non demandée ici, permet d'écrire les équations différentielles issues du nouveau montage. On peut alors les résoudre numériquement pour obtenir les solutions correspondantes qui sont représentées schématiquement dans un diagramme synchrone sur la figure 10.

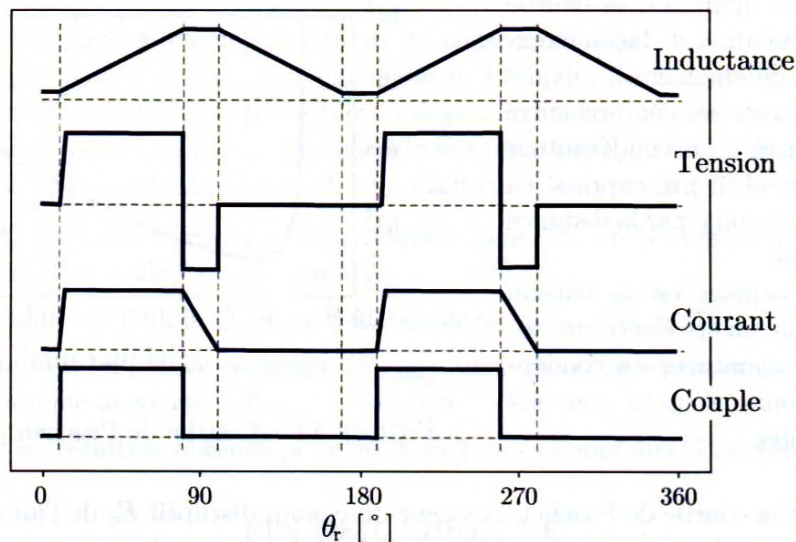


FIGURE 10 – Solutions numériques pour le montage 2.

- – 28. Comparer l'évolution du courant $i(\theta_r)$ observée avec les deux montages.
Préciser en quoi le montage n°2 est plus performant que le montage n°1.

IV Comparaison des deux types de moteurs. Lois d'échelle et « downsizing ».

Nous avons vu que la puissance mécanique moyenne développée par le moteur électrostatique à capacité variable et par le moteur électromagnétique monophasé à inductance variable pouvaient s'écrire, respectivement :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{P}_{m,el} \rangle &= \frac{1}{2} f U^2 (C_{\max} - C_{\min}) \\ \langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle &= \frac{1}{2} f I^2 (L_{\max} - L_{\min}) \end{cases}$$

où f est la fréquence de l'alimentation électrique, U est l'amplitude du créneau de tension appliqué au moteur capacitif et I est l'amplitude du créneau de courant parcourant le moteur inductif. On suppose dorénavant que $C_{\min} \ll C_{\max}$ et que $L_{\min} \ll L_{\max}$

- – 29. Justifier que, moyennant cette approximation, on peut écrire :

$$\begin{cases} \langle \mathcal{P}_{m,el} \rangle &\approx \frac{\varepsilon_0}{2} f V_{a,\max} E_a^2 \\ \langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle &\approx \frac{1}{2\mu_0} f V_{e,\max} B_e^2 \end{cases}$$

où $V_{a,\max}$ et $V_{e,\max}$ désignent respectivement les volumes maximum de l'espace inter armatures du condensateur et des entrefers du moteur à inductance variable, et E_a et B_e désignent respectivement les normes du champ électrique régnant dans le condensateur et du champ magnétique régnant dans l'entrefer du moteur à inductance variable.

- – 30. Sachant que le champ magnétique B_e est limité par la saturation du fer, et que $B_{\text{sat}} \approx 1 \text{ T}$, quel est l'ordre de grandeur du champ électrique E_a qu'il faudrait atteindre pour que deux moteurs capacitif et inductif de mêmes dimensions développent la même puissance ?

On donne, sur la figure 11, la courbe de Paschen représentant de façon empirique la tension de claquage V_c , exprimée en volts, de l'air sec compris entre les deux armatures d'un condensateur en fonction du produit pd , exprimé en bar·mm, de la pression p par la distance d inter-armatures.

La tension de claquage est la tension au-delà de laquelle un arc électrique apparaît entre les armatures du condensateur : l'air s'ionise et perd donc ses propriétés isolantes.

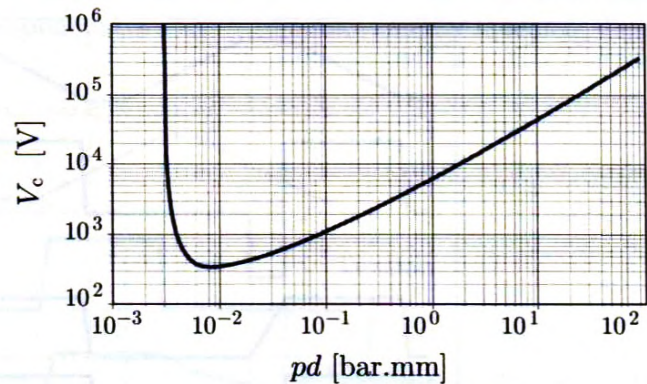


FIGURE 11 – Courbe de Paschen pour l'air sec.

- – 31. Dédurre de la courbe de Paschen la valeur du champ disruptif E_d de l'air sous la pression atmosphérique. Le champ disruptif est la valeur du champ électrique au-delà de laquelle l'air s'ionise.

Évaluer le rapport $\kappa = \langle \mathcal{P}_{m,el} \rangle_{\max} / \langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle_{\max}$ sous la pression atmosphérique.

Conclure quant à la faisabilité de moteurs électrostatiques macroscopiques sous la pression atmosphérique.

Sous quelle pression faudrait-il travailler pour que κ soit de l'ordre de 1 ?

Nous venons donc de constater que les moteurs électrostatiques macroscopiques étaient beaucoup moins performants que les moteurs électromagnétiques de mêmes dimensions, dans les conditions ordinaires. Pour conclure, nous proposons de montrer que les moteurs électrostatiques peuvent néanmoins s'avérer performants à petite échelle (réalisation de micro-moteurs ou de micro-actionneurs).

Pour mener à bien cette étude, il va falloir mettre en évidence des « lois d'échelle » que nous présentons succinctement.

Considérons un dispositif de dimensions L_x , L_y et L_z . On cherche à quantifier les conséquences d'un changement d'échelle de rapport h (sans dimension) dans toutes les directions. Les dimensions du système après changement d'échelle s'écrivent : $L'_x = hL_x$, $L'_y = hL_y$ et $L'_z = hL_z$. Pour indiquer qu'une longueur est multipliée par h , une surface S par h^2 et un volume V par h^3 , on adopte les notations suivantes : $L_x \sim h$, $S \sim h^2$, et $V \sim h^3$.

- – 32. Quelles sont les unités usuelles des constantes fondamentales ϵ_0 et μ_0 ?

En déduire qu'une capacité C et une inductance L vérifient les lois d'échelle $C \sim h$ et $L \sim h$.

On cherche dans un premier temps les lois d'échelle régissant le moteur électrostatique.

- – 33. Comment les charges sont-elles réparties sur les armatures ? En déduire que $U \sim h$.
 □ – 34. En considérant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au rotor, démontrer que le temps t vérifie la loi d'échelle $t \sim h$.
 □ – 35. En déduire la loi d'échelle régissant $\langle \mathcal{P}_{m,el} \rangle$ ainsi que celle régissant la puissance mécanique volumique moyenne $\langle \mathcal{P}_{m,el} \rangle$. Conclure.

On s'intéresse maintenant aux lois d'échelle régissant le moteur électromagnétique. Celui-ci étant parcouru par un courant, il est nécessairement le siège d'un effet Joule impliquant un échauffement.

- – 36. Donner sans démonstration l'expression de la résistance r d'un cable conducteur cylindrique en fonction de sa conductivité et de ses paramètres géométriques. En déduire que $r \sim h^{-1}$.

Supposons que l'on impose comme contrainte la constance de la température T du système supposée uniforme, dans l'opération de changement d'échelle (les matériaux étant donnés, la température ne doit pas excéder une certaine valeur maximale, indépendante de l'échelle). La puissance thermique échangée avec l'extérieur à la température T_{ext} s'écrit : $\mathcal{P}_{\text{th}} = kS(T - T_{\text{ext}})$ où S est la surface d'échange thermique et k un coefficient indépendant de la taille du système.

- – 37. Quelle est, en régime permanent, la relation liant $\mathcal{P}_{\text{th}}$ et la puissance moyenne $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$ dissipée par effet Joule ? En déduire que $I \sim h^{3/2}$.
 □ – 38. En procédant comme à la question 34, démontrer qu'ici $t \sim h^{1/2}$.
 □ – 39. En déduire la loi d'échelle régissant $\langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle$ ainsi que celle régissant la puissance mécanique volumique moyenne $\langle \mathcal{P}_{m,ma} \rangle$. Conclure.
 □ – 40. Comparer les résultats obtenus pour les deux types de moteurs. Conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE