ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2026

VENDREDI 17 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERES MP et MPI

Epreuve n° 9

MATHEMATIQUES C

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comporte sept pages, numérotées de 1 à 7, et quatre parties nommées I, II, III et IV. Le diagramme suivant représente les dépendances entre celles-ci.

$$\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{II} \qquad \mathrm{III} \longrightarrow \mathrm{IV}$$

Il est possible d'utiliser le résultat d'une question même si elle n'a pas été traitée, à condition d'indiquer clairement son numéro. La clarté, la concision et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, $n \geqslant 1$ est un entier. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombre réels et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Dans $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On note $\mathrm{A}^\top$ la transposée d'une matrice A. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x').$$

Pour $\mathrm{L} > 0$, une fonction $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est L-*lipschitzienne* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x)\| \leqslant \mathrm{L}\, \|x' - x\|.$$

Un point $x_* \in \mathbb{R}^n$ est un *point fixe* d'une fonction $\mathrm{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si $\mathrm{F}(x_*) = x_*$.

Partie I. — Inégalités variationnelles et projection sur un convexe fermé

A. — Inégalités variationnelles

Cette partie introduit les notions de solution faible et forte d'une inégalité variationnelle, ainsi que les opérateurs monotones.

Soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé non-vide.

On dit qu'un point $x_* \in \mathbb{R}^n$ est une *solution forte* de G sur C si $x_* \in C$ et si

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x_*), x - x_* \rangle \geqslant 0.$$

On dit qu'un point $x_* \in \mathbb{R}^n$ est une *solution faible* de G sur C si $x_* \in C$ et si

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x), x - x_* \rangle \geqslant 0.$$

On dit que G est un *opérateur monotone* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \langle G(x') - G(x), x' - x \rangle \geqslant 0.$$

1) Montrer que si G est un opérateur monotone et si $x_* \in C$ est une solution forte de G sur C, alors x_* est une solution faible de G sur C.

2) On suppose dans cette question que G est un opérateur monotone continu et qu'il existe $x_* \in C$ une solution faible de G sur C. Soient $x \in C$ et $\lambda \in]0, 1]$. On pose $x_\lambda = x_* + \lambda(x - x_*)$.
   a) Montrer que $\langle G(x_\lambda), x - x_* \rangle \geqslant 0$.
   b) En déduire que x_* est une solution forte de G sur C.

3) On suppose dans cette question que $n = 1$.
   a) Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $C \subset \mathbb{R}$ un ensemble convexe compact non-vide. Montrer qu'il existe une solution forte de G sur C.
   b) Montrer qu'il existe un ensemble convexe compact non-vide $C \subset \mathbb{R}$ et une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tels qu'il n'existe pas de solution faible de G sur C.

4) a) On suppose dans cette question que $n = 1$ et que G est un opérateur monotone. Soit $C \subset \mathbb{R}$ un ensemble convexe compact non-vide. Montrer qu'il existe une solution faible de G sur C.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un ensemble convexe compact non-vide $C \subset \mathbb{R}^n$ et un opérateur monotone $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tels qu'il n'existe pas de solution forte de G sur C.

B. — Projection sur un convexe fermé

Cette partie introduit la notion de projection sur un convexe fermé et établit quelques propriétés.

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé non-vide. On note $d_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$d_C(y) = \inf_{x \in C} \|x - y\|$$

pour $y \in \mathbb{R}^n$.

5) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un point $x \in C$ tel que

$$d_C(y) = \|y - x\|. \qquad (\star)$$

On admet que les deux propriétés suivantes sont vraies :

(i) pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, le point $x \in C$ vérifiant $(\star)$ est unique, il est appelé *projeté orthogonal* de y sur C et noté $\Pi_C(y)$;

(ii) $\Pi_C(y)$ est l'unique point de C vérifiant

$$\forall x' \in C, \quad \langle x' - \Pi_C(y), y - \Pi_C(y) \rangle \leqslant 0;$$

6) Soient $y, y' \in \mathbb{R}^n$. On pose $x = \Pi_C(y)$ et $x' = \Pi_C(y')$. Montrer que

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \|x'\|^2 - 2\langle y', x - x' \rangle \leqslant \|y' - y\|^2.$$

Partie II. — Un cas d'existence de solution et théorème du minimax de von Neumann

Cette partie démontre l'existence d'une solution forte dans le cas d'un opérateur monotone et continu sur un ensemble convexe, compact et non-vide et en déduit le théorème du minimax de von Neumann.

Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, compact et non-vide, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un opérateur monotone continu et $\eta > 0$.

On définit deux suites $(y_j)_{j\geqslant 1}$ et $(x_j)_{j\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ en posant $y_1 = 0$, $x_1 = \Pi_C(y_1)$, puis en définissant par récurrence pour tout entier $j \geqslant 2$:

$$y_j = -\eta \sum_{i=1}^{j-1} G(x_i) \qquad \text{et} \qquad x_j = \Pi_C(y_j).$$

Pour tout entier $j \geqslant 1$ on pose

$$B_j = \|x_j\|^2 - \|x_{j+1}\|^2 - 2\left\langle y_{j+1}, x_j - x_{j+1}\right\rangle .$$

Enfin, on fixe $x \in C$ et pour tout entier $j \geqslant 1$ on pose

$$D_j(x) = \|x\|^2 - \|x_j\|^2 - 2\left\langle y_j, x - x_j\right\rangle .$$

7) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$,

$$2\eta\left\langle G(x), x_j - x\right\rangle \leqslant 2\eta\left\langle G(x_j), x_j - x\right\rangle = D_j(x) - D_{j+1}(x) + B_j.$$

8) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{x}_\varepsilon \in C$ tel que

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x), \tilde{x}_\varepsilon - x\rangle \leqslant \varepsilon.$$

Indication. — *On pourra considérer un point de la forme $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$, avec $N \geqslant 1$ et $\eta > 0$ judicieusement choisis.*

9) En déduire qu'il existe une solution forte de G sur C.

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on note $\Delta_p = \left\{x = (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}_+)^p : \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\right\}$.

10) Soient $m, n \geqslant 1$ deux entiers, A une matrice réelle de taille $m \times n$. Soit $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad G(a,b) = (-Ab, A^\top a).$$

On identifie $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^{m+n}$.

a) Montrer G est un opérateur monotone continu.

b) En déduire que

$$\sup_{a\in\Delta_m} \inf_{b\in\Delta_n} \langle a, Ab\rangle = \inf_{b\in\Delta_n} \sup_{a\in\Delta_m} \langle a, Ab\rangle\,.$$

Partie III. — Itérations de Krasnoselskii–Mann

Cette partie introduit les itérations de point fixe de Krasnoselškii–Mann et établit leur convergence.

11) Montrer qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ et une fonction $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 1-lipschitzienne telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $F(x) \neq x$.

12) Montrer qu'il existe un entier $m \geqslant 1$, un point $x_* \in \mathbb{R}^m$, une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ dans $\mathbb{R}^m$ et une fonction $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 1-lipschitzienne tels que les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $F(x_*) = x_*$,

(ii) $\forall k \geqslant 1, \quad x_{k+1} = F(x_k)$,

(iii) la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ ne converge pas.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction 1-lipschitzienne admettant un point fixe $x_* \in \mathbb{R}^n$. Soit $\theta \in]0,1[$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \geqslant 1$, on pose

$$x_{k+1} = x_k + \theta(F(x_k) - x_k).$$

13) Montrer que la suite $(\|x_k - x_*\|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

14) Soit $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 + \theta(1-\theta)\,\|F(x_k) - x_k\|^2 = (1-\theta)\,\|x_k - x_*\|^2 + \theta\,\|F(x_k) - x_*\|^2 .$$

15) Montrer que la suite $(\|x_{k+1} - x_k\|)_{k\geqslant 1}$ converge vers 0.

16) Montrer que la suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers un point fixe de F.

Partie IV. — Théorème de Baillon–Haddad et descente de gradient

Cette partie porte sur les fonctions convexes dont les gradients sont lipschitziens, établit le théorème de Baillon–Haddad à la question 21), lequel permet enfin d'étudier la convergence de la descente de gradient en l'interprétant comme une itération de Krasnoselskii–Mann.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonction gradient qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe le vecteur

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, si elle existe, on note $\nabla^2 f(x)$ la matrice hessienne de f en x :

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

On suppose dans toute cette partie que f est convexe et qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x_*) = 0$. On note I la fonction identité sur $\mathbb{R}^n$ et on considère L un réel strictement positif.

17) Montrer que f admet un minimum en x_*.
Indication. — *Pour un point $x \in \mathbb{R}^n$ donné, on pourra considérer la fonction $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_x(t) = f(x_* + t(x - x_*))$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

18) Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 f(x)$ est une matrice symétrique positive.

19) Le but de cette question est de montrer que ∇f est L-lipschitzienne si, et seulement si,

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad f(x') - f(x) - \langle \nabla f(x), x' - x \rangle \leqslant \frac{L}{2} \|x' - x\|^2. \qquad \text{(P)}$$

a) Montrer que si ∇f est L-lipschitzienne, alors la propriété (P) est vraie.

b) Montrer que si la propriété (P) est vraie, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla f(x)\|^2 \leqslant 2L(f(x) - f(x_*)).$$

c) Montrer que si la propriété (P) est vraie, alors

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad f(x') \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), x' - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x') - \nabla f(x)\|^2.$$

d) Conclure.

20) On suppose dans cette question que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) ∇f est L-lipschitzienne.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $LI_n - \nabla^2 f(x)$ est symétrique positive, où I_n désigne la matrice identité de taille $n \times n$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de $\nabla^2 f(x)$ appartiennent à $[0, L]$.

On ne suppose plus que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et on suppose dorénavant que ∇f est L-lipschitzienne.

21) Montrer que $I - \frac{2}{L}\nabla f$ est 1-lipschitzienne.
Indication. — *On pourra utiliser l'inégalité de la question 19c).*

22) Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Pour $k \geqslant 1$, on définit par récurrence

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k).$$

Montrer que la suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ converge et que

$$f(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$