ÉNONCÉ ET CORRIGÉ DU CCINP - MP - MATHS 2 - 2026

OMAR SADIK

Exercice I

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$ et on note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°. Quel est le rang de la matrice J? Diagonaliser la matrice J sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.

2°. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.

3°. Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice A est : $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$.

4°. Déterminer les puissances successives de A par deux méthodes différentes :

- **a/** En déterminant le reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme $\pi_A = (X-b)(X-3a-b)$. On pourra laisser la réponse en fonction des matrices A et I. Pour simplifier les calculs, on posera $\lambda = 3a+b$ et on pourra laisser λ dans la réponse.
- **b/** Calculer J^k pour tout entier $k \geqslant 1$, puis utiliser $A = aJ + bJ$.
  On pourra laisser la réponse en fonction des matrices J et I (sans le signe somme).

Exercice II

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul. On note $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme de degré $n-1$ à coefficients réels. On note, pour $k \in [\![0, n-1]\!], \omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ les n racines n-ièmes de l'unité. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :
$(^*)$ le produit $P(\omega_1)P(\omega_2)\ldots P(\omega_{n-1})$ est un nombre réel.

5°. Exemple. Si on note $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, déterminer ce que vaut $1 + j + j^2$. Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (*).

6°. On note la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).
Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice J est $\chi_J = X^n - 1$.

7°. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
(les coefficients du polynôme P se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »). Comparer la matrice A et la matrice $P(J)$ (on ne demande pas le détail des calculs).

8°. Diagonaliser la matrice J dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

9°. En déduire le résultat (*)

Problème

10^o. Question de cours. Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$ et de sa norme euclidienne associée notée $\| \|$, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on définit le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E noté $p_F(x)$ ainsi : $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

a/ Si $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F, démontrer que $p_F(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \, e_i$.

b/ Démontrer que pour tout vecteur x de E, $\left\| p_F(x) \right\|^2 \leqslant \|x\|^2$ et que $\sum_{i=0}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$.

11^o. Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. On note désormais $F = \mathbb{R}_n[X], I = [0, +\infty[$ et E l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ soit intégrable sur l'intervalle l. Justifier que pour f et g dans E, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle I.

12^o. Démontrer que E est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant : $\forall (f,g) \in E^2, \langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

13^o. On identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi $\langle | \rangle$, défini sur $\mathbb{R}[X]$, par $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

14^o. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right).$$

a/ Calculer pour tout entier naturel $p \leqslant n, {h_n}^{(p)}(x)$.
Si $p < n$, que vaut $h_n^{(p)}(0)$?

b/ Démontrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant.

15^o. Soit g élément de $\mathbb{R}[X]$, exprimer $\left\langle g \mid h_n^{(n)} \right\rangle$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$, puis exprime $\left\langle g \mid L_n \right\rangle$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$.

16^o. Si L_i et L_j, avec $i < j$, sont deux éléments de F, déterminer $\left\langle L_i \mid L_j \right\rangle$.

17^o. Calculer par des intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle L_n \mid L_n \rangle$.

18^o. Que peut-on en conclure concernant la base $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ de vecteurs de F ? Exprimer, pour tout g élément de E, $p_F(g)$ dans cette base.

19^o. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \left\langle g \mid L_n \right\rangle^2$ converge et majorer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle g \mid L_n \right\rangle^2$.

20^o. Pour $\alpha > \dfrac{-1}{2}$, on pose $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, g_\alpha \in E$. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle g_\alpha \mid L_n \right\rangle^2 = \left\| g_\alpha \right\|^2$.

Exercice 1

1°. $rg(J) = 1$, la matrice J est symétrique réelle donc diagonalisable.

On a $\dim\ker J = 2$, donc $\ker J \neq \{0\}$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(J)$ et $m(0) \geqslant \dim\ker J = 2$, donc X_J est de la forme $X_J = X^2(X-\lambda)$.

Or $\mathrm{Tr}(J) = 3 = 0 + 0 + \lambda$; donc $\chi_J = X^2(X-3)$. J est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

2°. $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = aJ + bI_3 :$$

$$\begin{aligned} A &= aPDP^{-1} + bI_3 \\ &= P\left[aD + bI_3\right]P^{-1} \end{aligned}$$

Donc A est semblable à $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a+b \end{pmatrix}$

3°. A est donc diagonalisable, donc son polynôme minimal π_A est simplement scindé, alors :

$$\Pi_A = (X-a)(X-3a-b)$$

4°. **a/** D'autre part

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x]; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad X^n = \pi_A \cdot Q + \alpha X + \beta$$

Alors :

$$\begin{cases} b^n &= \alpha b + \beta \\ (3a+b)^n &= \alpha(3a+b) + \beta \end{cases}$$

Donc

$$\text{alors} \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda^n - b^n}{3a} \\ \beta = b^n - \left(\lambda^n - b^n\right)\dfrac{b}{3a} \end{cases}$$

or $\pi_A(A) = 0$; donc

$$A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{3a}A + \left[b^n - \left(\lambda^n - b^n\right)\frac{b}{3a}\right]I_3.$$

b/ $k \geqslant 1 : J^k = 3^{k-1}J$ (Récurrence).

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k J^k \cdot b^{n-k} \\ &= b^n I_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k \cdot 3^{k-1}J \cdot b^{n-k} \\ &= b^n I_3 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3a)^k b^{n-k} \cdot J - \frac{b^n}{3}J \\ &= b^n I_3 + \frac{(3a+b)^n}{3}J - \frac{b^n}{3}J \\ A^n &= b^n I_3 + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3}J. \end{aligned}$$

Exercice II

5^o. On prend : $\quad P(X)=1+2X+3X^2 : \quad n=3$

$$\begin{aligned}
P(\omega_1) &= P(j)=1+2j+3j^2=1+2j+3j^2\\
P(\omega_2) &= P\left(j^2\right)=1+2j^{-2}+3j^{-4}=1+2j^2+3j\\
P(\omega_1)\,P(\omega_2) &= \left(1+2j+3j^{-2}\right)\left(1+2j^2+3j\right)\\
&= 1+2j^2+3j+2j+4+6j^2+3j^2+6j+9.\\
&= 14+11j+11j^2\\
&= 14+11[-1]\\
&= 3\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

6^o. $X_J=\begin{vmatrix} X & -1 & & 0 & \\ 0 & X & -1 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & X & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & -1\\ -1 & 0 & \vdots & 0 & X \end{vmatrix}$

On effectue l'opération suivante :

$$C_1 \longleftarrow C_1+XC_2+X^2C_3+\ldots+X^{n-1}C_n$$

et on développe suivant la première colonne :

$$x_J=(-1)^{n+1}\left(X^n-1\right)\det(Diag(-1,-1,\ldots,-1))=X^n-1$$

Où $Diag(-1,-1,\ldots,-1)$ est une matrice diagonale d'ordre $n-1$.

7^o. $A=a_0I_3+a_1J+a_2J^2+\cdots+a_{n-1}J^{n-1}=P(J)$

8^o. $\exists Q\in GL_n(G)$ telle que $J=Q\,\mathbf{diag}(\omega_0,\omega_1,\ldots.,\omega_{n-1})\,Q^{-1}$ car ses valeurs propres sont exactement les ω_k avec $k=0,\ldots,(n-1)$

Donc $A=Q\,\mathbf{diag}\left(P(\omega_0),P(\omega_1),\ldots,P(\omega_{n-1})\right)Q^{-1}$

9^o. **Ici peut être il veulent montrer que $P(\omega_0)\ldots P(\omega_{n-1})\in\mathbb{R}$.**

On a $\det A=P(\omega_0)\,P(\omega_1)\ldots P(\omega_{n-1})$, le produit de ses valeurs propres.

Or $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc les $a_i\in\mathbb{R}$, donc $\det A\in\mathbb{R}$, d'où le résultat.

Remarque : Si $P(\omega_0)\neq 0$, alors $P(\omega_1)\ldots P(\omega_{n-1})=\dfrac{\det A}{P(\omega_0)}\in\mathbb{R}$.

Si $P(\omega_0)=0$ donc $P(1)=0$, on peut montrer que $P(\omega_1)\ldots P(\omega_{n-1})\in\mathbb{R}$ sauf que la démonstration est loin du chemin de l'exercice.

Problème

10^o. **a/** $p_F(x)\in F$; donc $\exists a_0,\ldots a_n\in\mathbb{R}$ tel que $p_F(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_ie_i$

Soit $j\in[0,n]$: $\left\langle p_F(x)\mid e_j\right\rangle=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i\left\langle e_i\mid e_j\right\rangle=a_j$ donc $a_j=\left\langle p_F(x)-x+x\mid e_j\right\rangle=\left\langle x\mid e_j\right\rangle$ car $x-p_F(x)\in F^{\perp}$. Donc

$$p_F(x)=\sum_{i=0}^{n}\langle x\mid e_i\rangle\,e_i$$

b/ On a : $\quad x=x-p_F(x)+p_F(x)$

Donc $\|x\|^2=\left\|x-p_F(x)\right\|^2+\left\|p_F(x)\right\|^2+2\left\langle x-p_F(x)\mid p_F(x)\right\rangle=\left\|x-p_F(x)\right\|^2+\left\|p_F(x)\right\|^2$

Car $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $p_F(x) \in F$. Donc

$$\left\| p_F(x) \right\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

$$\begin{aligned}\left\| p_F(x) \right\|^2 &= \left\langle p_F(x) \mid p_F(x) \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \left\langle x \mid e_j \right\rangle \left\langle e_i \mid e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2\end{aligned}$$

Or $\left\| p_F(x) \right\|^2 \leqslant \|x\|^2$ Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$

11^o. On a $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$, donc $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.

- $t \longmapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur I.
- $\forall t \geqslant 0. \quad |f(t)g(t)e^{-t}| \leqslant \dfrac{f^2(t)e^{-t} + g^2(t)e^{-t}}{2}$.

or $f, g \in E$ donc $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I.

12^o. Soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors d'après la question précédente $\langle f \mid g \rangle$ est bien définie. c'est facile de vérifier les propriétés suivantes :

- $\langle f \mid g \rangle = \langle g \mid f \rangle$.
- $\langle f + \lambda g \mid h \rangle = \langle f \mid h \rangle + \lambda \langle g \mid h \rangle$.
- $\langle f \mid f \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)e^{-t}dt \geqslant 0$ car $f(x) \in \mathbb{R}$.
- Supposons que $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors : $\forall t \geqslant 0$; $f^2(t)e^{-t} = 0$ donc $f = 0$ sur I.

Alors $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scolaire sur E.

13^o. $F \subset E$, car $\forall P \in F$: $\quad P^2(t)e^{-t} = 0\left(1/t^2\right)$ lorsque t est proche de l'infini, et l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc l'application $t \longmapsto P^2(t)e^{-t}$ qui est continue est intégrable sur I.

Or F est un espace vectoriel, donc F est un sev de E.

14^o. **a/** Supposons que $p \leqslant n$; par la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned}h^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(x^n\right)^{(k)} \left(e^{-x}\right)^{(p-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x}\end{aligned}$$

Donc si $p < n$, alors $n - k \geqslant n - p > 0$, donc $h_n^{(p)}(0) = 0$.

b/

$$\begin{aligned}\mathrm{L_n}(x) &= \frac{e^x}{n!} h^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k)!} x^k\end{aligned}$$

$d^\circ L_n = n$ et son coefficient dominant est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

15^o. Peut être ici il y'a une faute de l'énoncé, il veulent dire calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt &= \left[g(t)h_n^{(n-1)}(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g'(t)h_n^{(n-1)}(t)dt\\ &= -\int_0^{+\infty} g'(t)h_n^{(n-1)}(t)dt\end{aligned}$$

Car $\left(h_n^{(n-1)}g\right)(t)$ est de la forme $P(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ où $P\in\mathbb{R}[X]$; et $h_n^{(n-1)}(0)=0$.

Par récurrence $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt$

$$\begin{aligned}\left\langle g \mid L_n\right\rangle &= \int_0^{+\infty} g(t)L_n(t)e^{-t}dt\\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt.\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^ne^{-t}dt.\end{aligned}$$

16^o. Par application de la question précédente :

$\displaystyle\langle L_i \mid L_j\rangle = \int_0^{+\infty} L_i(t)L_j(t)e^{-t}dt = \frac{1}{j!}\int_0^{+\infty} L_i(t)h_j^{(j)}(t)dt = \frac{(-1)^j}{j!}\int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t)h_j(t)dt = 0$

Car L_i est un polynôme de degré i et $j>i$.

17^o. Posons $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt$, on a $I_0=1$, soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}I_n &= -\left[t^ne^{-t}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt\\ &= nI_{n-1}\end{aligned}$$

Par récurrence : $I_n=n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On a L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$, donc $L_n^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{n!}=(-1)^n$. Par application de la question **15)**, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_n\rangle &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t)t^ne^{-t}dt\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt\\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^ndt\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}, \|L_n\|=1$

18^o. $(L_0,\dots,L_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonné, de plus $\forall i\in\mathbb{N} : L_i\neq 0$: car $dL_i=i$, et $\forall i\in[\![0,n]\!] : L_i\in F$ et $\dim F = n+1 = \mathrm{Card}\,(L_0,\dots,L_n)$.

Donc $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de F, de plus $\forall i;j : \left\langle L_i \mid L_j\right\rangle = \delta_{i,j}$; donc c'est une BON de F.

Alors : $p_F(g)=\displaystyle\sum_{i=0}^n\langle g \mid L_i\rangle L_i$.

19^o. Par application de la question **10)*b***), $\forall n\in\mathbb{N}; \displaystyle\sum_{i=0}^n\langle g \mid L_i\rangle^2 \leqslant \|g\|^2$, donc la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0}\langle g \mid L_i\rangle^2$ à termes positifs et sa suite des sommes partielles est majorée donc elle est convergente de plus

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\langle g \mid L_i\rangle^2 \leqslant \|g\|^2$$

20°. $\alpha > -\dfrac{1}{2}$, l'application g_α est $\mathscr{C}^\circ$ sur I, de plus $t \longmapsto g_\alpha^2(t)e^{-t} = e^{-(2\alpha+1)t}$ est intégrable sur I car $2\alpha+1>0$; alors $g_\alpha \in E$.

$$\begin{aligned}\|g_\alpha\|^2 &= \langle g_\alpha \mid g_\alpha\rangle \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t}dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle g_\alpha \mid L_n\rangle &= \int_0^{+\infty} g_\alpha(t)L_n(t)e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_\alpha(t)h_n^{(n)}(t)dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} g_\alpha^{(n)}(t)h_n(t)dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}t^n e^{-t}dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t}dt \\ &= \frac{\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(\alpha+1)^n}e^{-u}\frac{du}{\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}n!}n! \\ &= \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} < 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\langle g_n \mid L_n\rangle^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{2\alpha+1} = \|g_\alpha\|^2$

Pour vos remarques sadikoulmeki@yahoo.fr