Correction Mathématiques D 2026 - MP

Martin Aléon, Xavier Goubault--Larrecq

21 avril 2026

Dans tout le sujet, on note Z_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Si X est une variable aléatoire, on note G_X sa fonction génératrice.

Préliminaires

Partie préliminaire : Lois de Poisson, inégalités

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(1) Calculer la fonction génératrice de Z_λ.

On a $\underline{G_{Z_\lambda}(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} s^k \mathbb{P}(Z_\lambda = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(s\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(s-1)}}$.

(2a) Montrer que pour tous $u, r > 0$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq e^{-ur}\mathbb{E}[e^{uZ_\lambda}]$.

Soit $u, r > 0$. Par croissance de $x \mapsto e^{ux}$ puisque $u > 0$ (il suffit en fait d'avoir $u \geq 0$, ce qu'on réutilise dans la question suivante), $\underline{\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) = \mathbb{P}(e^{uZ_\lambda} \geq e^{ur}) \leq e^{-ur}\mathbb{E}(e^{uZ_\lambda})}$ par inégalité de Markov (l'espérance est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, les quantités étant positives).

(2b) Montrer pour tout $r \geq \lambda$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq \exp(-r\ln(r) + r\ln(\lambda) + r - \lambda)$.

Par définition de la fonction génératrice, $\underline{\mathbb{E}(e^{uZ_\lambda}) = G_{Z_\lambda}(e^u) = e^{\lambda(e^u-1)}}$, du fait de la question 1. On a donc, par la question précédente, $\underline{\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq e^{-ur+\lambda(e^u-1)}}$ pour $u \geq 0$. Il s'agit donc de trouver la valeur de u qui minimise le terme $-ur + \lambda(e^u - 1)$, qui a pour dérivée en u : $-r + \lambda e^u$. On peut donc prendre $\underline{u = \ln(r) - \ln(\lambda) \geq 0}$ et on obtient alors $\underline{\mathbb{P}(Z_\lambda \geq r) \leq e^{-\ln(r)r + r\ln(\lambda) + r - \lambda}}$.

(2c) Montrer que pour tout $r \in]0, \lambda]$ on a $\mathbb{P}(Z_\lambda \leq r) \leq \exp(-r\ln(r) + r\ln(\lambda) + r - \lambda)$.

On applique le même raisonnement qu'aux deux questions précédentes, mais en composant par $\underline{x \mapsto e^{-ux} \text{ qui est décroissante avec } u \geq 0}$. En effet, par Markov et le calcul de la question 1, pour un tel u : $\underline{\mathbb{P}(Z_\lambda \leq r) = \mathbb{P}(e^{-uZ_\lambda} \geq e^{-ur}) \leq e^{ur}\mathbb{E}(e^{-uZ_\lambda}) = e^{ur+\lambda(e^{-u}-1)}}$. En prenant $\underline{u = \ln(\lambda) - \ln(r) \geq 0}$, on obtient alors $\underline{\mathbb{P}(Z_\lambda \leq r) \leq e^{-\ln(r)r + r\ln(\lambda) + r - \lambda}}$

(3) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ on a $\ln(k!) \leq (k+1)\ln(k) - k + 1$.

Par croissance du logarithme, on a $\ln(i) \leq \int_i^{i+1} \ln(x)dx$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Comme le logarithme a pour primitive $x\ln(x) - x$, on en déduit en découpant le k-ième terme que :

$$\ln(k!) = \ln(k) + \sum_{i=1}^{k-1} \ln(i) \leq \ln(k) + \int_1^k \ln(x)dx = \ln(k) + (k\ln(k) - k + 1) = (k+1)\ln(k) - k + 1.$$

1. Opérateur de Chen-Stein et approximation poissonienne

1.1. Opérateur de Chen-Stein

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on définit pour tout entier $n \geq 0$:

$$\mathcal{L}_\lambda f(n) = \lambda f(n+1) - nf(n);$$

Ainsi, $\mathcal{L}_\lambda f$ est une fonction sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |f(n)|$$

pour $f \in \mathcal{F}$.

On note $\mathcal{G}_\lambda$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $f(Z_\lambda) \in L^1$, et on admet que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit $\mathcal{G}_\lambda$ de la norme

$$\|f\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|]$$

pour $f \in \mathcal{G}_\lambda$.

(4a) Montrer que $\|\cdot\|_{(\lambda)}$ définit bien une norme sur $\mathcal{G}_\lambda$.

Soit $f, g \in \mathcal{G}_\lambda$, il faut vérifier que :

- $\|f\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|] \geq 0$. Il s'agit de la croissance de l'espérance.
- L'homogénéité : il s'agit de la linéarité de l'espérance et l'homogénéité de la valeur absolue - $\|xf\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}[|xf(Z_\lambda)|] = |x| \cdot \mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|] = |x| \cdot \|f\|_{(\lambda)}$.
- L'inégalité triangulaire : par inégalité triangulaire usuelle et la croissance de l'espérance, puis la linéarité $\|f+g\|_{(\lambda)} = \mathbb{E}(|f(Z_\lambda)+g(Z_\lambda)|) \leq \mathbb{E}(|f(Z_\lambda)|+|g(Z_\lambda)|) = \|f\|_{(\lambda)}+\|g\|_{(\lambda)}$.
- Séparation : on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < \mathbb{P}(Z_\lambda = k)$, et de plus, en tronquant une somme de termes positifs à un seul, que $\mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|] \geq |f(k)|\mathbb{P}(Z_\lambda = k)$. On en déduit que si $\mathbb{E}[|f(Z_\lambda)|] = 0$, alors $f(k) = 0$.

(4b) Montrer que $\mathcal{L}_\lambda$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}_\lambda$.

Soit $f, g \in \mathcal{F}$, $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}_\lambda(f+\mu g)(n) = \lambda(f+\mu g)(n+1) - n(f(n) + \mu g(n)) = \mathcal{L}_\lambda(f)(n) + \mu\mathcal{L}_\lambda(g)(n)$$

Donc $\mathcal{L}_\lambda$ est linéaire. Montrons qu'elle est à valeurs dans $\mathcal{G}_\lambda$ et qu'elle est continue.
On a $|f| \leq \|f\|_\infty$. On a donc $|\lambda f(Z_\lambda+1) - Z_\lambda f(Z_\lambda)| \leq \lambda\|f\|_\infty + Z_\lambda\|f\|_\infty$ presque sûrement par inégalité triangulaire, car Z_λ presque sûrement positive. On en déduit que $\|\mathcal{L}_\lambda(f)\|_{(\lambda)} \leq 2\lambda\|f\|_\infty$ puisque $\mathbb{E}(Z_\lambda) = \lambda$. D'où l'appartenance à $\mathcal{G}_\lambda$ et la continuité.

(4c) Montrer que si $f \in \mathcal{F}$ et si X est une variable aléatoire L^1 à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathcal{L}_\lambda f(X) \in L^1$.

On a $|f| \leq \|f\|_\infty$ donc, de même que dans la question précédente, $|\lambda f(X+1) - Xf(X)| \leq \lambda \|f\|_\infty + X\|f\|_\infty$ presque sûrement et

$$\mathbb{E}(|\mathcal{L}_\lambda(f)(X)|) \leq (\lambda + \|X\|_1)\|f\|_\infty < +\infty$$

Donc $\mathcal{L}_\lambda f(X) \in L^1$.

(5a) Soit X une variable aléatoire L^1 à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, si $f \in \mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = \mathbb{E}[\lambda f(X+1) - Xf(X)] = \lambda \mathbb{E}[f(X+1)] - \mathbb{E}[Xf(X)]$ par linéarité de l'espérance. On a donc :

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = e^{-\lambda}\left(\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} f(n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} n\frac{\lambda^n}{n!} f(n)\right)$$

il ne reste alors que le terme en 0 de la somme de droite (tous les autres se compensent deux à deux). Ce terme est nul, donc $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0$

Réciproquement, si $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, on peut en particulier pour une indicatrice $f = \mathbb{1}_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$0 = \mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda \mathbb{1}_n(X)] = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\lambda \mathbb{1}_n(k+1) - k\mathbb{1}_n(k))\mathbb{P}(X=k) = \lambda \mathbb{P}(X = n-1) - n\mathbb{P}(X=n)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda}{n}\mathbb{P}(X=n-1)$ ce qui donne par récurrence que $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{P}(X=0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En sommant sur tous les événements possibles, on a

$$e^\lambda \mathbb{P}(X=0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{P}(X=0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

Donc $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}$ et $\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ c'est-à-dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(5b) Soit $g \in \mathcal{F}$. Montrer que si $\mathbb{E}[g(Z_\lambda)] \neq 0$ alors il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{L}_\lambda f = g$.

Par le sens direct de la question précédente, pour tout $f \in \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(Z_\lambda)] = 0 \neq \mathbb{E}[g(Z_\lambda)]$ et donc $\mathcal{L}_\lambda f \neq g$ puisque $\mathcal{L}_\lambda f(Z_\lambda)$ et $g(Z_\lambda)$ ne suivent pas la même loi, ayant une espérance différente. Ceci prouve le résultat demandé.

(6) Soit $g \in \mathcal{F}$. Démontrer qu'il existe une unique fonction $h_g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$h_g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\lambda h_g = g$$

et montrer que pour tout $k \geq 0$ on a :

$$h_g(k+1) = \frac{1}{\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda = k)} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(Z_\lambda = j)g(j).$$

Pour tout h vérifiant $\mathcal{L}_\lambda h = g$, on a la relation $\forall n \geq 0, \lambda h(n+1) - nh(n) = g(n)$. Commençons par vérifier que la formule donnée vérifie cette relation de récurrence.

$$\underline{\lambda h_g(k+1) - kh_g(k)} = \lambda \frac{k!e^\lambda}{\lambda^{k+1}} \sum_{0\leq j\leq k} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} g(j) - k \frac{(k-1)!e^\lambda}{\lambda^k} \sum_{0\leq j\leq k-1} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} g(j) \underline{= g(k)}$$

La fonction proposée convient donc bien, ce qui montre l'existence.
Soit h une autre fonction qui convienne. Notons $n \geq 1$ (car $h(0) = h_g(0) = 0$) le plus petit indice où elle diffère de h_g en raisonnant par l'absurde. On a donc par minimalité de cet indice que $h(n) = \frac{g(n-1)-(n-1)h(n-1)}{\lambda} = \frac{g(n-1)-(n-1)h_g(n-1)}{\lambda} = h_g(n)$. Contradiction, on a donc $h = h_g$ d'où l'unicité de h_g.

(7) Montrer que si $g \in \mathcal{F}$ et $\mathbb{E}[g(Z_\lambda)] = 0$ alors $\|h_g\|_\infty \leq e\|g\|_\infty$. Selon l'approche choisie, il est possible qu'il soit plus naturel d'identifier une autre borne explicite, tout résultat numérique explicite sera valorisé.

Si $\mathbb{E}[g(Z_\lambda)] = 0$, on peut utiliser la queue pour majorer

$$\left| \sum_{0\leq j\leq k} \mathbb{P}(Z_\lambda = j) g(j) \right| = \left| -\sum_{k<j} \mathbb{P}(Z_\lambda = j) g(j) \right| \leq \|g\|_\infty \sum_{k<j} \mathbb{P}(Z_\lambda = j) = \|g\|_\infty \mathbb{P}(Z_\lambda > k)$$

par formule de transfert, inégalité triangulaire et positivité des probabilités.
On a donc pour $\lambda < k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{|h_g(k+1)|}{\|g\|_\infty} &\leq \frac{\mathbb{P}(Z_\lambda > k)}{\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda = k)} = \frac{k!e^\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda \geq k+1)}{\lambda^{k+1}} && \text{- par ce qu'on vient de dire} \\
&\leq e^{\lambda-(k+1)\ln(\lambda)+\ln(k!)-(k+1)\ln(k+1)+(k+1)\ln(\lambda)+k+1-\lambda} && \text{- par question } 2b \\
&= e^{\ln(k!)-(k+1)\ln(k+1)+k+1} \\
&\leq e^{(k+1)\ln(k)-k+1-(k+1)\ln(k+1)+k+1} && \text{- par question 3} \\
&= e^{(k+1)\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)+2} \leq e && \text{- par concavité du logarithme, } \ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Pour le cas $\lambda \geq k+1$, on n'a pas besoin de cet argument de queue, puisqu'on peut directement utiliser $\left| \sum_{0\leq j\leq k} \mathbb{P}(Z_\lambda = j) g(j) \right| \leq \|g\|_\infty \mathbb{P}(Z_\lambda \leq k)$ et faire le même type d'argument :

$$\begin{aligned}
\frac{|h_g(k+1)|}{\|g\|_\infty} &\leq \frac{\mathbb{P}(Z_\lambda \leq k)}{\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda = k)} = \frac{k!e^\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda \leq k)}{\lambda^{k+1}} \leq \frac{k!e^\lambda \mathbb{P}(Z_\lambda \leq k+1)}{\lambda^{k+1}} \\
&\leq e^{\lambda-(k+1)\ln(\lambda)+\ln(k!)-(k+1)\ln(k+1)+(k+1)\ln(\lambda)+k+1-\lambda} && \text{- par question } 2c \\
&\leq e && \text{- par exactement le même calcul}
\end{aligned}$$

De plus, il est trivial que $|h_g(0)| = 0 \leq e\|g\|_\infty$.
Au total, en ayant distingué selon sa position relative à λ, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on trouve $|h_g(k)| \leq e\|g\|_\infty$ et donc $\|h_g\|_\infty \leq e\|g\|_\infty$.
Remarque : la borne obtenue avec ce calcul peut possiblement être améliorée en utilisant les formules d'Euler-Maclaurin pour estimer $\ln(k!)$.

(8) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)| \leq e\sup\{\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] : f\in\mathcal{F}, \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Soit $A\subset\mathbb{N}$, on pose $g_A(x)=\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)\in\mathcal{F}$ et $\|g_A\|_\infty\leq 1$. Par la question 6, il existe un unique h_A tel que $h_A(0)=0$ et $\mathcal{L}_\lambda h_A = g_A$. On sait par la question 7 que $\|h_A\|_\infty \leq e\|g_A\|_\infty \leq e$. Posons alors $f_A=\frac{1}{e}h_A$ qui vérifie $\|f_A\|_\infty = \frac{1}{e}\|h_A\|_\infty \leq 1$. On remarque alors que

$$\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\in A}]-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)=\mathbb{E}[g_A(X)]=\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda h_A(X)]=e\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f_A(X)]$$

de sorte que $|\mathbb{P}(X\in A)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)| = e|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f_A(X)]| \leq e\sup\{\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(X)] \mid f\in\mathcal{F}, \|f\|_\infty\leq 1\}$ (on a enlevé la valeur absolue à l'intérieur du sup car on peut toujours se ramener de f à $-f$).
En passant au sup sur les parties $A\subset\mathbb{N}$, on conclut à l'inégalité voulue.

1.2. Sommes de variables aléatoires et approximation poissonienne

Soit $N\geq 2$ un entier. Dans cette partie, $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ sont des variables aléatoires telles que pour tout $1\leq i\leq N$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i\in]0,1[$. On pose

$$B_1=\sum_{i=1}^N p_i^2, \qquad \lambda=\sum_{i=1}^N p_i,$$

et

$$W=\sum_{i=1}^N X_i, \qquad W_i=\sum_{j=1, j\neq i}^N X_j \quad \text{pour } 1\leq i\leq N.$$

Dans cette partie 1.2, f désigne un élément de $\mathcal{F}$.

1.2.1. Variables aléatoires indépendantes

On suppose dans cette partie 1.2.1 que les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ sont indépendantes.

(9a) Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^N p_i\mathbb{E}[f(W+1)-f(W_i+1)].$$

On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] &= \mathbb{E}[\lambda f(W+1)-Wf(W)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N (p_i f(W+1)-X_i f(W_i+X_i))\right]\\ &= \sum_{i=1}^N (p_i\mathbb{E}[f(W+1)]-\mathbb{E}[X_i f(W_i+X_i)]) \quad \text{par linéarité de l'espérance}\end{aligned}$$

On remarque, du fait de l'indépendance (qui permet de séparer les probabilités sur X_i des autres), que $\mathbb{E}[X_i f(W_i+X_i)] = \mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{E}[f(W_i+1)]+\mathbb{P}(X_i=0)\mathbb{E}[0] = p_i\mathbb{E}[f(W_i+1)]$.
Donc $\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^N p_i\mathbb{E}[f(W+1)-f(W_i+1)]$.

(9b) En déduire que
$$\sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{P}(W\in A)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)| \le 2eB_1.$$

Dès que $X_i=0$, on a $f(W+1)-f(W_i+1)=0$. Donc :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(W+1)-f(W_i+1)]| &= |\mathbb{E}[(f(W+1)-f(W_i+1))\,\mathbb{1}_{X_i=1}]|\\ &\le \mathbb{E}[|f(W+1)-f(W_i+1)|\,\mathbb{1}_{X_i=1}] \le 2\|f\|_\infty\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_i=1}] = 2p_i\|f\|_\infty\end{aligned}$$

Donc, par la question précédente, on a $|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \le \sum_{i=1}^N 2p_i^2\|f\|_\infty = 2B_1\|f\|_\infty$. En appliquant la formule de la question 8., on obtient $\sup\limits_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{P}(W\in A)-\mathbb{P}(Z_\lambda\in A)| \le 2eB_1$.

(10) Pour $n\ge 1$, soit Y_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $(n,\lambda/n)$. Montrer que pour tout $n\ge 1$ et pour tout entier $k\ge 0$ on a :
$$\left|\mathbb{P}(Y_n=k)-\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right| \le \frac{2e\lambda^2}{n}.$$

On note que $Y_n=\sum\limits_{i=1}^n X_i$ avec les X_i indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. Pour cette famille de variables aléatoires, on a $B_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}$ et donc par la question précédente $\left|\mathbb{P}(Y_n=k)-\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right| \le \frac{2e\lambda^2}{n}$.

1.2.2. Variables aléatoires dépendantes

On ne suppose plus que les variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le N}$ sont indépendantes. Pour $1\le i\le N$, on définit l'ensemble $\mathcal{D}_i$ comme suit :
$$\mathcal{D}_i=\{j\neq i : X_i, X_j \text{ dépendants}\}.$$

On pose ensuite
$$T_i=\sum_{j\in\mathcal{D}_i} X_j,\quad S_i = W-T_i-X_i.$$

On pose également
$$p_{ij}=\mathbb{E}[X_iX_j],$$

et
$$B_2=\sum_{i=1}^N\sum_{j\in\mathcal{D}_i} p_ip_j,\quad B_3=\sum_{i=1}^N\sum_{j\in\mathcal{D}_i} p_{ij}.$$

(11) Montrer que
$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^N \left(p_i\mathbb{E}[f(W+1)-f(S_i+1)]-\mathbb{E}[X_i(f(S_i+T_i+1)-f(S_i+1))]\right).$$

On écrit

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \mathbb{E}[\lambda f(W+1)-Wf(W)] = \sum_{i=1}^N p_i\mathbb{E}[f(W+1)]-\mathbb{E}[X_if(W)]$$

Or $\mathbb{E}[X_i f(W)] = \mathbb{E}[X_i f(S_i + T_i + X_i)] = \mathbb{E}[X_i(f(S_i + T_i + X_i) - f(S_i + X_i))] + \mathbb{E}[X_i f(S_i + X_i)]$. De plus comme S_i est la somme des X_j avec lesquelles X_i est indépendante, on a $\mathbb{E}[X_i f(S_i + X_i)] = p_i \mathbb{E}[f(S_i + 1)] + (1 - p_i)\mathbb{E}[0 \times f(S_i + 1)] = p_i \mathbb{E}[f(S_i + 1)]$. De plus on peut vérifier que $X_i(f(S_i + T_i + X_i) - f(S_i + X_i)) = X_i(f(S_i + T_i + 1) - f(S_i + 1))$ car elles coïncident si $X_i = 0$ et si $X_i = 1$. On obtient donc, :

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)] = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i \mathbb{E}[f(W+1) - f(S_i + 1)] - \mathbb{E}[X_i(f(S_i + T_i + 1) - f(S_i + 1))]\right)$$

(12) En déduire que

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z_\lambda \in A)| \leq 2e(B_1 + B_2 + B_3).$$

Dès que $T_i + X_i = 0$, on a $f(W+1) - f(S_i + 1) = 0$ (puisque $W = S_i$ alors). Pour cela, il suffit que $X_i = 0$ et pour tout $j \neq i$ tel que X_i et X_j soient dépendants, $X_j = 0$. Autrement dit, pour que $f(W+1) - f(S_i+1) \neq 0$, il faut que X_i ou l'un des X_j avec qui il est dépendant soit non nul, ce qui arrive avec probabilité au plus $\mathbb{P}(X_i = 1 \cup \bigcup_{j \in \mathcal{D}_i} X_j = 1) \leq \mathbb{P}(X_i = 1) + \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \mathbb{P}(X_j = 1) = p_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_j$ par inégalité de Boole. Ainsi,

$$\left| \sum_{i=1}^{N} p_i \mathbb{E}[f(W+1) - f(S_i + 1)] \right| \leq 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^{N} \left(p_i^2 + \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_i p_j \right) = 2\|f\|_\infty (B_1 + B_2)$$

Dès que $T_i = 0$ (i.e. $X_j = 0$ pour tout $j \neq i$ tel que X_j et X_i soient dépendants) ou $X_i = 0$, on a $X_i(f(S_i + T_i + 1) - f(S_i + 1)) = 0$. Autrement dit, il suffit que pour tout $j \neq i$ tel que X_j et X_i soient dépendants, $X_i X_j = 0$. Donc, le terme est non nul avec probabilité au plus $\mathbb{P}(\bigcup_{j \in \mathcal{D}_i} X_i X_j = 1) \leq \sum_{j \in \mathcal{D}_i} \mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_{ij}$. Ainsi,

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[X_i(f(S_i + T_i + 1) - f(S_i + 1))] \right| \leq 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \mathcal{D}_i} p_{ij} = 2\|f\|_\infty B_3$$

Au total, on a par inégalité triangulaire que $|\mathbb{E}[\mathcal{L}_\lambda f(W)]| \leq 2\|f\|_\infty (B_1 + B_2 + B_3)$ et donc par la question 8 que $\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(Z_\lambda \in A)| \leq 2e(B_1 + B_2 + B_3)$.

2. Inégalités de concentration

2.1. Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable borné E de $\mathbb{R}$ et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable F. On pose $F_Y := \{y \in F : \mathbb{P}(Y = y) > 0\}$. On note $\mathbb{E}[X|Y]$ la variable aléatoire $\phi(Y)$ où la fonction ϕ est définie comme suit. Pour $y \in F$,

$$\phi(y) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) & \text{si } y \in F_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(13a) Montrer que si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}[X|Y] \geq 0$ presque sûrement.

Pour $y \in F_Y$, comme $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x \cap Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$, cette probabilité conditionnelle est nulle dès que $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
Si $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, par ce qu'on vient de dire, quel que soit $x \in E$ strictement négatif, du fait de l'hypothèse $X \geq 0$ presque sûrement, on a $\mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(X = x|Y = y)$. Dans ce cas, la définition de $\phi(y)$ est en fait une somme de termes positifs de sorte que $\phi(y) \geq 0$.
Si $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ et $\phi(y) = 0 \geq 0$. Dans tous les cas, on obtient que $\phi(Y) = \mathbb{E}[X|Y] \geq 0$ (presque sûrement).

Remarque : La définition donnée par le sujet (qui est restrictive) montre qu'en tous les évènements, $\mathbb{E}[X|Y] \geq 0$ car elle vaut 0 dans le cas d'un évènement de probabilité nulle. Le deuxième "presque sûrement" de l'énoncé est donc inutile selon la définition posée ici.

(13b) Justifier que $\mathbb{E}[X|Y]$ est L^1, et que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$.

La famille des $x\mathbb{P}(Y = y \cap X = x)$ pour $x \in E$ et $y \in F_Y$ est sommable. En effet, comme les événements $(Y = y)_{y \in F_Y}$ forment une partition de l'univers, par la formule des probabilités totales, on a dans $\mathbb{R}+$ que $\sum_{x \in E, y \in F_Y} |x|\mathbb{P}(Y = y \cap X = x) = \mathbb{E}[|X|] < +\infty$. Ainsi, par la formule de transfert, en manipulant une famille sommable, on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E, y \in F_Y} x\mathbb{P}(Y = y \cap X = x) = \sum_{y \in F_Y} \mathbb{P}(Y = y) \left(\sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x|Y = y) \right) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

La sommabilité prouve également que $\mathbb{E}[X|Y]$ est L^1.

(13c) Montrer que pour toute fonction g bornée on a $\mathbb{E}[g(X)|X] = g(X)$ presque sûrement.

On étend naturellement les notations utilisées pour Y à X.
Comme g est bornée, $g(X)$ est une variable aléatoire L^1 à valeurs dans $g(E)$ dénombrable et borné, ce qui justifie la bonne définition de ce qui suit. Comme $(g(X) = y \cap X = x) = (X = x \cap g(x) = y)$, si $x \in F_X$, on a

$$\phi(x) = \sum_{y \in g(E)} y\mathbb{P}(g(X) = y|X = x) = \sum_{y \in g(E)} y \frac{\mathbb{P}(g(x) = y \cap X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \sum_{y \in g(E)} y\, \mathbb{1}_{g(x)=y} = g(x)$$

ce qui prouve le résultat demandé.

(13d) Montrer que pour toute fonction h bornée on a $\mathbb{E}[h(Y)X|Y] = h(Y)\mathbb{E}[X|Y]$ presque sûrement.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans E ensemble dénombrable et borné, on notera $\mathbb{E}[X|Y = y] := \phi(y)$ où $\phi(Y)$ reprend la même définition que celle qui a été donnée (qui dépend de X) dans toute la suite.
Comme h est bornée et X est à valeurs dans un ensemble borné, la variable aléatoire $h(Y)X$ est bornée donc est dans L^1. On peut donc manipuler la famille sommable pour $y \in F_Y$:

$$\mathbb{E}[h(Y)X \mid Y = y] = \sum_{x \in E} h(y)x\mathbb{P}(X = x|Y = y) = h(y) \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x|Y = y) = h(y)\mathbb{E}[X|Y = y]$$

Donc $\mathbb{E}[h(Y)X|Y] = h(Y)\mathbb{E}[X|Y]$ presque sûrement.

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable borné E' de $\mathbb{R}$.

(14a) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ presque sûrement.

Si X et Y sont indépendantes, pour tout $y \in F_Y$ et tout $x \in E$, on a

$$\underline{\mathbb{P}(X = x|Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \underline{\mathbb{P}(X = x)}$$

Ainsi, pour $y \in F_Y$,

$$\underline{\phi(y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}[X]}$$

donc $\underline{\mathbb{E}[X \mid Y] = \phi(Y) = \mathbb{E}[X]}$ presque sûrement.

(14b) Montrer que si Z est indépendante de (X, Y), alors $\mathbb{E}[XZ|Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X|Y]$ presque sûrement.

Comme X et Z sont bornées, XZ l'est aussi et est donc dans L^1. Comme Z est indépendante de (X, Y), $\mathbb{P}(X = x \cap Z = z \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$ et donc pour $y \in F_Y$,

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y)} &= \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Z = z \cap Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)\mathbb{P}(Z = z)}{\mathbb{P}(Y = y)} \\ &\underline{= \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Z = z)}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $y \in F_Y$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XZ|Y = y] &= \sum_{x \in E}\sum_{z \in E'} xz\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y) = \sum_{x \in E}\sum_{z \in E'} xz\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\mathbb{P}(Z = z) \\ &= \left(\sum_{z \in E'} z\mathbb{P}(Z = z)\right)\left(\sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\right) \\ &= \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X \mid Y = y]\end{aligned}$$

Donc $\underline{\mathbb{E}[XZ|Y] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[X|Y] \text{ presque sûrement.}}$

(14c) Montrer que $\mathbb{E}[X + \lambda Z|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + \lambda\mathbb{E}[Z|Y]$ presque sûrement.

Encore une fois, comme X et Z sont bornées, $X + \lambda Z$ l'est aussi et est donc dans L^1. Pour $y \in F_Y$, on a

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{E}[X + \lambda Z|Y = y]} &= \sum_{(x,z) \in E \times E'} (x + \lambda z)\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y) \\ &= \sum_{(x,z) \in E \times E'} x\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y) + \lambda \sum_{(x,z) \in E \times E'} z\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y) \\ &= \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x|Y = y) + \lambda \sum_{z \in E'} z\,\mathbb{P}(Z = z|Y = y) \quad \text{en sommant d'abord selon x ou z} \\ &\underline{= \mathbb{E}[X|Y = y] + \lambda\mathbb{E}[Z|Y = y]}\end{aligned}$$

Toutes les opérations sont licites car les famille des $x\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y)$ et $\lambda z\mathbb{P}(X = x \cap Z = z|Y = y)$ sont sommables. Ainsi, $\mathbb{E}[X + \lambda Z|Y] = \mathbb{E}[X|Y] + \lambda\mathbb{E}[Z|Y]$ presque sûrement.

2.2. Un énoncé abstrait

Soient W et W' deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble dénombrable E. On dit que le couple (W, W') est échangeable si (W, W') et (W', W) ont la même loi.

Dans toute cette partie 2.2, on suppose que le couple (W, W') est échangeable et on considère une fonction $F : E^2 \to \mathbb{R}$ bornée et qui vérifie $F(x, y) = -F(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. On note enfin ϕ la fonction telle que
$$\mathbb{E}[F(W, W') \mid W] = \phi(W).$$

(15) Montrer que pour toute fonction $h : E \to \mathbb{R}$ bornée on a

$$\mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \mathbb{E}[h(W)F(W, W')] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(h(W) - h(W'))F(W, W')]$$

et $\mathbb{E}[\phi(W)] = 0$.

Comme h est bornée et F est bornée, les variables considérées sont bien dans L^1. Par la question 13d, appliquée à $X = F(W, W')$ et $Y = W$, on a

$$\mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \mathbb{E}\left[h(W)\mathbb{E}[F(W, W')|W]\right] = \mathbb{E}[h(W)F(W, W')]$$

Montrons maintenant la seconde égalité. Comme (W, W') et (W', W) ont la même loi, on a $\mathbb{E}[h(W')F(W, W')] = \mathbb{E}[h(W)F(W', W)]$. Comme $F(W', W) = -F(W, W')$, on a également $\mathbb{E}[h(W)F(W', W)] = -\mathbb{E}[h(W)F(W, W')]$.
On a donc $\mathbb{E}[h(W)F(W, W')] = -\mathbb{E}[h(W')F(W, W')]$ c'est-à-dire en écrivant $\mathbb{E}[h(W')F(W', W)]$ comme une moyenne d'elle-même et en appliquant cette égalité à un seul des termes que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(W)F(W, W')] &= \frac{\mathbb{E}[h(W)F(W, W')] + \mathbb{E}[h(W)F(W, W')]}{2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[h(W)F(W, W')] - \mathbb{E}[h(W')F(W, W')]}{2} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[(h(W) - h(W'))F(W, W')]
\end{aligned}$$

En prenant $h = 1$ la fonction constante (qui est bornée) on obtient immédiatement que $\mathbb{E}[\phi(W)] = 0$.

Dans la suite, on note Δ la fonction telle que

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}[|(\phi(W) - \phi(W'))F(W, W')||W] = \Delta(W)$$

et pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose
$$m(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}].$$

On admet qu'il existe deux constantes (déterministes) $B \geq 0$ et $C \geq 0$ telles que presque sûrement

$$\Delta(W) \leq B\phi(W) + C.$$

(16a) Montrer que $m(\theta) < \infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, que m est dérivable et que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$m'(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')})F(W,W')].$$

La variable $\phi(W)$ est bornée car F est bornée et par inégalité triangulaire $|\phi(W)| = |\mathbb{E}[F(W,W') \mid W]| \leq \mathbb{E}[|F(W,W')| \mid W] \leq \|F\|_\infty$. Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq e^{\theta\phi(W)} \leq e^{|\theta|\|F\|_\infty}$ ce qui prouve que $m(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}] < +\infty$.
La fonction $\theta \mapsto e^{\theta\phi(W)}$ est dérivable (même $\mathcal{C}^\infty$), de dérivée $\phi(W)e^{\theta\phi(W)}$. De plus, pour $\theta \in [-M; M]$ avec $M > 0$ quelconque fixé, on a $|\phi(W)e^{\theta\phi(W)}| \leq \|F\|_\infty e^{M\|F\|_\infty} < +\infty$. Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions (corollaire du théorème de convergence dominée) m est alors dérivable sur chaque $[-M; M]$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$, et $m'(\theta) = \mathbb{E}[\phi(W)e^{\theta\phi(W)}]$.
En appliquant la question 15 à la fonction bornée $h : x \mapsto e^{\theta\phi(x)}$, on a :

$$m'(\theta) = \mathbb{E}[h(W)\phi(W)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(h(W) - h(W'))F(W,W')] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')})F(W,W')]$$

(16b) Montrer que pour tout $\theta \geq 0$ on a $m'(\theta) \leq B\theta m'(\theta) + C\theta m(\theta)$, et en déduire pour tout $\theta \in [0; 1/B[$ (avec la convention $1/0 = +\infty$ lorsque $B = 0$) on a

$$\ln m(\theta) \leq \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}.$$

Soit $\theta \geq 0$, par la question précédente, $m'(\theta) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[(e^{\theta\phi(W)} - e^{\theta\phi(W')})F(W,W')]$. Or, comme $\tanh(u) \leq u$ pour $u \geq 0$ (car tanh est 1-lipschitzienne et vaut 0 en 0), pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|e^x - e^y| = 2e^{\frac{x+y}{2}} \sinh(|\frac{x-y}{2}|) \leq 2\frac{|x-y|}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \cosh(|\frac{x-y}{2}|) = \frac{|x-y|}{2}(e^x + e^y)$.
On en déduit par une inégalité triangulaire et l'échangeabilité de (W, W') que

$$m'(\theta) \leq \frac{\theta}{4}\mathbb{E}\left[|\phi(W) - \phi(W')| \cdot |F(W,W')|(e^{\theta\phi(W)} + e^{\theta\phi(W')})\right] = \frac{\theta}{2}\mathbb{E}\left[|\phi(W) - \phi(W')| \cdot |F(W,W')|e^{\theta\phi(W)}\right]$$

Par la question 13d puis 13b, on remarque alors que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}\Delta(W)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[e^{\theta\phi(W)}\mathbb{E}[|(\phi(W) - \phi(W'))F(W,W')| \mid W]\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}|(\phi(W) - \phi(W'))F(W,W')| \mid W]\right] \quad \text{par 13d} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}|(\phi(W) - \phi(W'))F(W,W')|] \quad \text{par 13b}
\end{aligned}$$

Donc

$$m'(\theta) \leq \theta\mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}\Delta(W)] \leq B\theta\mathbb{E}[\phi(W)e^{\theta\phi(W)}] + C\theta\mathbb{E}[e^{\theta\phi(W)}] = B\theta m'(\theta) + C\theta m(\theta)$$

Si $0 \leq \theta < 1/B$, alors $1 - B\theta > 0$, et de l'inégalité précédente, on tire :

$$\frac{m'(\theta)}{m(\theta)} \leq \frac{C\theta}{1 - B\theta}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et θ, on en déduit :

$$\ln m(\theta) = \ln m(\theta) - \ln m(0) \leq \int_0^\theta \frac{Cu}{1 - Bu}du \leq \int_0^\theta \frac{Cu}{1 - B\theta}du = \frac{C\theta^2}{2(1 - B\theta)}$$

(17) En prenant $\theta = t/(C+Bt)$, montrer que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|\phi(W)| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}}.$$

Soit $t \geq 0$, pour $\theta = \frac{t}{C+Bt} \geq 0$, comme B et C sont positifs, on a $\theta < \frac{1}{B}$. Par l'inégalité de Markov, pour tout $\theta \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\phi(W) \geq t) = \mathbb{P}(e^{\theta\phi(W)} \geq e^{\theta t}) \leq e^{-\theta t} m(\theta)$$

Donc, par la question précédente,

$$\mathbb{P}(\phi(W) \geq t) \leq \exp\left(-\theta t + \frac{C\theta^2}{2(1-B\theta)}\right)$$

Avec le choix $\theta = \frac{t}{C+Bt}$, on a $1 - B\theta = \frac{C}{C+Bt}$, donc $\frac{C\theta^2}{2(1-B\theta)} = \frac{t^2}{2(C+Bt)}$ et $\theta t = \frac{t^2}{C+Bt}$. Donc $-\theta t + \frac{C\theta^2}{2(1-B\theta)} = -\frac{t^2}{2(C+Bt)}$ Finalement,

$$\mathbb{P}(\phi(W) \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}}$$

En appliquant le même raisonnement à $-\phi(W)$, on obtient

$$\mathbb{P}(\phi(W) \leq -t) \leq e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}}$$

Par réunion des événements,

$$\mathbb{P}(|\phi(W)| \geq t) \leq \mathbb{P}(\phi(W) \geq t) + \mathbb{P}(\phi(W) \leq -t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}}$$

3. Applications

3.1. Sommes de variables indépendantes

Soit $N \geq 1$ un entier. On considère dans cette partie des variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ indépendantes à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ (on ne les suppose pas forcément de même loi). On suppose qu'il existe une constante (déterministe) $K > 0$ telle que $|X_i| \leq K$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

On considère également des variables aléatoires $(X'_i)_{1\leq i\leq N}$ pour tout $1 \leq i \leq N$ X'_i a la même loi que X_i et telle que $(X_1, \ldots, X_N)$ est indépendant de $(X'_1, \ldots, X'_N)$. Enfin, on considère I une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$, indépendante de $(X_1, X_2, \ldots, X_N, X'_1, X'_2, \ldots, X'_N)$.

Pour tout $1 \leq i \leq N$ on pose

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i] \quad \text{et} \quad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i)$$

où $\mathrm{Var}(X)$ désigne la variance de la variable aléatoire réelle X. On pose également

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad S'_N = S_N - X_I + X'_I$$

On considère enfin pour tout $1 \leq i \leq N$ une constante (déterministe) $c_i > 0$ telle que

$$\text{presque sûrement} \quad |X_i - \mu_i| \leq c_i$$

Notons que X_I est bien une variable aléatoire car $X_I = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{I=i} X_i$.

(18a) Montrer que (S_N, S'_N) est échangeable.

Si E est un événement, notons $\mathbb{P}_i(E) = \mathbb{P}(E \cap I = i)$. Commençons par étudier les probabilités à I fixé, où on fait attention à l'ordre dans lequel on utilise l'indépendance (puisqu'on n'a pas d'indépendance globale, ce qui rend la chose un peu lourde) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(S_N = x \cap S'_N = y) &= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}_i(S_N = x \cap S'_N = y \cap X_i = z) \quad \text{par probabilités totales} \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}_i(S_N - X_i = x - z \cap X'_i = z - x + y \cap X_i = z) \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S_N - X_i = x - z \cap X_i = z \cap X'_i = z - x + y) \\
&\qquad \underline{\text{par indépendance de } I \text{ vis-à-vis des } X_j,\ X'_j \text{ et } S_N \text{ par coalition}} \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S_N - X_i = x - z \cap X_i = z)\mathbb{P}(X'_i = z - x + y) \\
&\qquad \underline{\text{par indépendance de } X'_i \text{ vis-à-vis des } (X_j)_{1 \le j \le N}} \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S_N - X_i = x - z)\mathbb{P}(X_i = z)\mathbb{P}(X'_i = z - x + y) \\
&\qquad \underline{\text{par indépendance des } X_j \text{ entre eux}} \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}(I = i)\mathbb{P}(S_N - X_i = x - z)\mathbb{P}(X_i = z - x + y)\mathbb{P}(X'_i = z) \quad (\underline{\text{même loi}}) \\
&= \sum_{z \in X_i(\Omega)} \mathbb{P}_i(S_N - X_i = x - z \cap X_i = z - x + y \cap X'_i = z) \quad \text{de même} \\
&= \mathbb{P}_i(S_N = y, S'_N = x)
\end{aligned}$$

Alors, à nouveau par <u>probabilités totales</u> (mais sur les valeurs que peut prendre I) on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_N = x \cap S'_N = y) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i(S_N = x \cap S'_N = y) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}_i(S_N = y \cap S'_N = x) \quad \text{par le calcul précédent} \\
&= \mathbb{P}(S_N = y \cap S'_N = x)
\end{aligned}$$

Donc (S_N, S'_N) a la même loi que (S'_N, S_N), c'est-à-dire que <u>(S_N, S'_N) est échangeable.</u>

(18b) Montrer que presque sûrement

$$\mathbb{E}[X_I | S_N] = \frac{S_N}{N}.$$

Il s'agit de montrer que $\phi(x) := \mathbb{E}[X_I | S_N = x] = \frac{x}{N}$ si $\mathbb{P}(S_N = x) > 0$.
Dans ce cas là, on a

$$\phi(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y\mathbb{P}(X_I = y | S_N = x) = \frac{1}{\mathbb{P}(S_N = x)} \sum_{y \in \mathbb{R}} \sum_{1 \le k \le N} y\mathbb{P}(X_k = y \cap I = k \cap S_N = x)$$

Or comme par le lemme des coalitions I est indépendante de X_k et S_N, on a $\mathbb{P}(X_k = y \cap I = k \cap S_N = x) = \mathbb{P}(X_k = y \cap S_N = x)\mathbb{P}(I = k) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_k = y \cap S_N = x)$. En notant $\phi_k(S_N) = \mathbb{E}[X_k|S_N]$ et $\phi_{tot}(S_N) = \mathbb{E}[S_N|S_N]$, On peut donc écrire :

$$\phi(x) = \frac{1}{N\mathbb{P}(S_N = x)} \sum_{1\leq k\leq N} \sum_{y\in\mathbb{R}} y\mathbb{P}(X_k = y \cap S_N = x) = \frac{1}{N} \sum_{1\leq k\leq N} \phi_k(x) = \frac{1}{N}\phi_{tot}(x) = \frac{x}{N}$$

par la question 13c. Toutes les opérations faites ici sur les sommes sont justifiées, car il s'agit de familles sommables.
Donc $\mathbb{E}[X_I|S_N] = \frac{S_N}{N}$ presque sûrement.

(19) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N (c_i^2 + \sigma_i^2)}\right).$$

Indication. On pourra considérer la fonction $F(x, y) = N(x - y)$.

On va considérer la fonction F proposée avec le couple (S_N, S_N') qu'on sait échangeable par la question 18a. Calculons :

$$\begin{aligned}
\phi(S_N) &= \mathbb{E}[N(S_N - S_N')|S_N] = \mathbb{E}[N(X_I - X_I')|S_N] && \text{par définition de } S_N' \\
&= S_N - N\mathbb{E}[X_I'|S_N] && \text{par question 18b, et la linéarité (question 14c)} \\
&= S_N - N\mathbb{E}[X_I'] && \text{par indépendance par coalition de } X_I' \text{ et } S_N \text{ (et la question 14a)} \\
&= S_N - N\mathbb{E}[X_I] && \text{car } X_I \text{ et } X_I' \text{ ont la même loi} \\
&= S_N - N\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_I|S_N]] && \text{par la question 13b} \\
&= S_N - \mathbb{E}[S_N] && \text{par question 18b à nouveau}
\end{aligned}$$

On a également par des calculs totalement similaires :

$$2\Delta(S_N) = N\mathbb{E}[(X_I - X_I')^2|S_N] = N\mathbb{E}\left[\sum_{1\leq k\leq N} \mathbb{1}_{I=k}(X_k - X_k')^2|S_N\right] = \sum_{1\leq k\leq N} \mathbb{E}[(X_k - X_k')^2|S_N]$$

par indépendance de I vis-à-vis des autres variables, et linéarité de l'espérance conditionnelle (question 14c).
On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_i - X_i')^2|S_N] &= \mathbb{E}[X_i^2|S_N] - 2\mathbb{E}[X_i|S_N]\mathbb{E}[X_i'] + \mathbb{E}[X_i'^2] && \text{par linéarité (14c) ainsi que la question 14b} \\
&= \mathbb{E}[X_i^2|S_N] - 2\mathbb{E}[X_i|S_N]\mathbb{E}[X_i] + \mathbb{E}[X_i^2] && \text{même loi} \\
&= \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2|S_N] + (\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2) \leq c_i^2 + \sigma_i^2
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer la question 17 avec $B = 0$ et $C = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq N}(c_i^2 + \sigma_i^2)$ ce qui donne pour $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) = \mathbb{P}(|\phi(S_N)| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}} = 2\exp\left(-\frac{t^2}{\sum_{i=1}^N (c_i^2 + \sigma_i^2)}\right)$$

(20) On suppose dans cette question que $0 \leq X_i \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[S_N]+t}\right).$$

Reprenons la question précédente au calcul de $\Delta(S_N)$ en utilisant que $X_I^2 \leq X_I$ du fait de l'hypothèse faite à cette question (et on majore le terme négatif par 0) :

$$\begin{aligned}\underline{2\Delta(S_N)} &= N\mathbb{E}[(X_I - X_I')^2|S_N] = N\mathbb{E}[X_I^2|S_N] - 2N\mathbb{E}[X_I|S_N]\mathbb{E}[X_I] + N\mathbb{E}[X_I^2] \\ &\underline{\leq N\mathbb{E}[X_I|S_N] + N\mathbb{E}[X_I] = S_N + \mathbb{E}[S_N] = \phi(S_N) + 2\mathbb{E}[S_N]}\end{aligned}$$

On peut donc appliquer la question 17 avec $C = \mathbb{E}[S_N]$ et $B = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2C+2Bt}} = 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\mathbb{E}[S_N]+t}\right)$$

3.2. Permutations aléatoires

Soit $N \geq 1$. On considère une variable aléatoire π_N à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{S}_N$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, N\}$ qui suit la loi uniforme. On considère également I et J deux variables aléatoires qui suivent la loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que I, J, π_N sont indépendantes. On pose enfin $\pi_N' = \pi_N \circ (I, J)$ (où (i, j) désigne la transposition qui échange i et j pour $i \neq j$ et (i, i) désigne la permutation identité).

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ des nombres réels tels que $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi_N(i)}.$$

(21) Montrer que (π_N, π_N') est un couple échangeable.

Pour tout $i, j \in [\![1; N]\!]$, la fonction $f : \pi \mapsto \pi \circ (i\,j)$ de $\mathcal{S}_N$ dans lui-même est une bijection (car elle est son propre inverse), de sorte que si π_N suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_N$, il en est de même de $\pi_N \circ (i\,j)$. La fonction induit alors une bijection sur l'ensemble des couples de la forme $(\pi, \pi \circ (i\,j))$ (en l'appliquant sur les deux coordonnées, elle y est toujours son propre inverse) de sorte que $(\pi_N, \pi_N \circ (i, j))$ et $(f(\pi_N), f(\pi_N \circ (i, j))) = (\pi_N \circ (i, j), \pi_N)$ ont la même loi et donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\pi_N, \pi_N') = (\sigma, \sigma')) &= \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{P}((\pi_N, \pi_N \circ (i\,j)) = (\sigma, \sigma')) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} \mathbb{P}((\pi_N \circ (i\,j), \pi_N) = (\sigma, \sigma')) \quad \text{par ce qu'on vient de dire} \\ &= \mathbb{P}((\pi_N', \pi_N) = (\sigma, \sigma'))\end{aligned}$$

Donc $\underline{(\pi_N, \pi_N')}$ est échangeable.

(22a) Soit $\pi \in \mathcal{S}_N$ une permutation quelconque. Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{N} (a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} - a_{i,\pi(j)} - a_{j,\pi(i)})^2 \leq 2 \sum_{i,j=1}^{N} (a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} + a_{i,\pi(j)} + a_{j,\pi(i)}).$$

Soit w, x, y, z quatre réels dans $[0;1]$, on va commencer par montrer qu'alors $(w+x-y-z)^2 \leq 2(w+x+y+z)$.
Si u et v sont deux réels, on a $(u-v)^2 \geq 0$, donc $u^2+v^2 \geq 2uv$ c'est-à-dire $2u^2+2v^2 \geq u^2+2uv+v^2 = (u+v)^2$. En particulier, en prenant $u = w-y$ et $v = x-z$, on a :

$$(w+x-y-z)^2 \leq 2(w-y)^2 + 2(x-z)^2$$

Comme les w, x, y, z sont dans l'intervalle $[0;1]$, on a $|w-y|$ et $|x-z| \leq 1$ de sorte qu'avec en plus une inégalité triangulaire :

$$(w-y)^2 \leq |w-y| \leq w+y, \qquad (x-z)^2 \leq |x-z| \leq x+z$$

Au total, on a donc $(w+x-y-z)^2 \leq 2(w+x+y+z)$, et donc pour tout $1 \leq i,j \leq N$ que $(a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} - a_{i,\pi(j)} - a_{j,\pi(i)})^2 \leq 2(a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} + a_{i,\pi(j)} + a_{j,\pi(i)})$. En sommant, on a l'inégalité désirée :

$$\sum_{i,j=1}^{N} (a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} - a_{i,\pi(j)} - a_{j,\pi(i)})^2 \leq 2 \sum_{i,j=1}^{N} (a_{i,\pi(i)} + a_{j,\pi(j)} + a_{i,\pi(j)} + a_{j,\pi(i)})$$

(22b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\mathbb{E}[S_N]+2t}\right)$.

On applique la partie 2.2 au couple échangeable $(W, W') = (\pi_N, \pi'_N)$ et à la fonction anti-symétrique et bornée $F(\pi, \pi') = \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i,\pi(i)} - a_{i,\pi'(i)}\right)$. Comme $\pi'_N = \pi_N \circ (I, J)$, presque tous les termes de la somme précédente sont nuls sauf potentiellement ceux en I et J :

$$F(\pi_N, \pi'_N) = a_{I,\pi_N(I)} + a_{J,\pi_N(J)} - a_{I,\pi_N(J)} - a_{J,\pi_N(I)}$$

En notant $S_N := \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi_N(i)}$ et $S'_N := \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi'_N(i)}$, on a donc si $\pi_N = \pi \in \mathcal{S}_N$:

$$\begin{aligned}
\phi(\pi) &= \mathbb{E}[F(\pi_N, \pi'_N) | \pi_N = \pi] \\
&= \mathbb{E}[a_{I,\pi_N(I)} + a_{J,\pi_N(J)} - a_{I,\pi_N(J)} - a_{J,\pi_N(I)} | \pi_N = \pi] \\
&= \left(\mathbb{E}[a_{I,\pi(I)}] + \mathbb{E}[a_{J,\pi(J)}]\right) - \left(\mathbb{E}[a_{I,\pi(J)}] + \mathbb{E}[a_{J,\pi(I)}]\right) \\
&= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi(i)} - \frac{2}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,\pi(j)} \quad \text{en développant les probabilités par indépendance de } I \text{ et } J \\
&= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi(i)} - \frac{2}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \quad \text{par invariance par permutation de la somme de droite} \\
&= \frac{2}{N}(S_N - \mathbb{E}[S_N])
\end{aligned}$$

où on a identifié que par linéarité $\mathbb{E}[S_N] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[a_{i,\pi_N(i)}] = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}$ (comme π_N suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_N$, il y a invariance de sa loi par composition par un cycle $(1\,2\ldots N)$ ce qui assure que pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, $\pi_N(j)$ suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$).
Ainsi, on a $\phi(\pi_N) = \frac{2}{N}(S_N - \mathbb{E}[S_N])$.

Majorons maintenant $\Delta(\pi_N)$. Par ce qu'on vient de dire, on a $|\phi(\pi_N)-\phi(\pi'_N)| = \frac{2}{N}|S_N - S'_N|$ et $F(\pi_N,\pi'_N) = S_N - S'_N$, donc :

$$\begin{aligned}
\Delta(\pi_N) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[|(\phi(\pi_N)-\phi(\pi'_N))F(\pi_N,\pi'_N)| \mid \pi_N] = \frac{1}{N}\mathbb{E}[(S_N - S'_N)^2 \mid \pi_N] \\
&= \frac{1}{N}\mathbb{E}[(a_{I,\pi_N(I)} + a_{J,\pi_N(J)} - a_{I,\pi_N(J)} - a_{J,\pi_N(I)})^2 \mid \pi_N] \\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{i,j=1}^{N}\left(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} - a_{i,\pi_N(j)} - a_{j,\pi_N(i)}\right)^2 \\
&\le \frac{2}{N^3}\sum_{i,j=1}^{N}\left(a_{i,\pi_N(i)} + a_{j,\pi_N(j)} + a_{i,\pi_N(j)} + a_{j,\pi_N(i)}\right) \quad \text{par question } 22a \\
&= \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N} a_{i,\pi_N(i)} + \frac{4}{N^3}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} \\
&= \frac{4}{N^2}S_N + \frac{4}{N^2}\mathbb{E}[S_N]
\end{aligned}$$

Comme $S_N = \mathbb{E}[S_N] + \frac{N}{2}\phi(\pi_N)$ par ce qu'on a dit juste avant, on en déduit que

$$\Delta(\pi_N) \le \frac{2}{N}\phi(\pi_N) + \frac{8}{N^2}\mathbb{E}[S_N]$$

Par la question 17 avec $B = \frac{2}{N}$ et $C = \frac{8}{N^2}\mathbb{E}[S_N]$, on a donc :

$$\mathbb{P}(|S_N - \mathbb{E}[S_N]| \ge t) = \mathbb{P}(|\phi(\pi_N)| \ge \frac{2}{N}t) \le 2\exp\left(-\frac{(2t/N)^2}{2C + 4Bt/N}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\mathbb{E}[S_N] + 2t}\right)$$

(23) Démontrer que pour tout $2 \le k \le N$ la probabilité que π_N ait au moins k points fixes vaut au plus $2e^{-k/12}$.

Prenons $a_{i,j} = \mathbb{1}_{i=j} \in [0;1]$ pour tout $1 \le i,j \le N$ de sorte que le nombre de points fixes d'une permutation $\pi \in \mathcal{S}_N$ soit exactement $\sum_{i=1}^N a_{i,\pi(i)}$. Ainsi, π_N a $S_N = \sum_{i=1}^N a_{i,\pi_N(i)}$ points fixes, et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[S_N] = \sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}[a_{i,\pi_N(i)}] = \sum_{i=1}^{N}\mathbb{P}(\pi_N(i) = i) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N} = 1$$

puisque comme à la question précédente, pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, $\pi_N(i)$ suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.
Ainsi, par la question 22b, on a pour tout $t \ge 0$ que

$$\mathbb{P}(|S_N - 1| \ge t) \le 2\exp\left(-\frac{t^2}{4+2t}\right)$$

Si π_N a au moins k points fixes, alors $S_N \ge k$, et pour $k \ge 2$, $\{S_N \ge k\} \subset \{|S_N - 1| \ge k-1\}$ (puisque S_N est à valeurs dans $\mathbb{N}$) et donc :

$$\mathbb{P}(S_N \ge k) \le \mathbb{P}(|S_N - 1| \ge k-1) \le 2\exp\left(-\frac{(k-1)^2}{4+2(k-1)}\right) = 2\exp\left(-\frac{(k-1)^2}{2k+2}\right)$$

Il reste à montrer que $\frac{(k-1)^2}{2k+2} \ge \frac{k}{12}$ pour $k \ge 2$. Cela équivaut à $12(k-1)^2 \ge k(2k+2)$ c'est-à-dire en développant à $10(k-2)(k-\frac{3}{5}) = 10k^2 - 26k + 12 \ge 0$ ce qui est vrai pour tout

$k \geq 2$. Donc $\mathbb{P}(S_N \geq k) \leq 2e^{-k/12}$.

3.3. Magnétisation dans le modèle de Curie-Weiss

Soit $N \geq 1$ un entier, $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_N)$ à valeurs dans $\{-1, 1\}^N$, dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)) = \frac{1}{Z_N} \exp\left(\frac{\beta}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right)$$

$$\text{pour } (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N.$$

La quantité Z_N est une constante de sorte que l'expression précédente soit une loi de probabilité, et on ne la calculera pas. On pose

$$m(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \text{et} \qquad m_i(X) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_j$$

pour $1 \leq i \leq N$.

(24) Soit $1 \leq i_0 \leq N$. Montrer que presque sûrement $\mathbb{E}\left[X_{i_0} \mid (X_j)_{1 \leq j \leq N,\, j \neq i_0}\right] = \tanh\left(\beta m_{i_0}(X) + \beta h\right)$ où on rappelle que tanh est la fonction tangente hyperbolique.

Par la formule de la loi conjointe, pour $(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^N$ on a en utilisant les probabilités totales que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{i_0} = \varepsilon_{i_0} \mid (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0}\right) &= \frac{\mathbb{P}(X = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N})}{\mathbb{P}((X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N})}{\mathbb{P}(X = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N}) + \mathbb{P}(X_{i_0} = -\varepsilon_{i_0} \cap (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0})} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(X_{i_0} = -\varepsilon_{i_0} \cap (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0})}{\mathbb{P}(X = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N})}} \\
&= \frac{1}{1 + e^{-2\varepsilon_{i_0}\left(\beta h + \frac{\beta}{N} \sum_{j \neq i_0} \varepsilon_j\right)}} \\
&= \frac{e^{\varepsilon_{i_0}(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}}{e^{\varepsilon_{i_0}(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))} + e^{-\varepsilon_{i_0}(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}}
\end{aligned}$$

où $m_{i_0}(\varepsilon) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{N} \varepsilon_j$ (ce qui ne dépend pas de ε_{i_0}). Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{i_0} \mid (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0}\right] &= \mathbb{P}\left(X_{i_0} = 1 \mid (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0}\right) - \mathbb{P}\left(X_{i_0} = -1 \mid (X_j)_{j \neq i_0} = (\varepsilon_j)_{j \neq i_0}\right) \\
&= \frac{e^{\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon)}}{e^{\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon)} + e^{-(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}} - \frac{e^{-(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}}{e^{-(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))} + e^{\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon)}} \\
&= \frac{e^{\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon)} - e^{-(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}}{e^{\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon)} + e^{-(\beta h + \beta m_{i_0}(\varepsilon))}} \\
&= \tanh\left(\beta m_{i_0}(\varepsilon) + \beta h\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}\left[X_{i_0} \mid (X_j)_{1 \leq j \leq N,\, j \neq i_0}\right] = \tanh\left(\beta m_{i_0}(X) + \beta h\right)$ presque sûrement.

À partir de la variable aléatoire X, on construit maintenant une variable aléatoire $X' = (X'_1, \dots, X'_N)$ à valeurs dans $\{-1,1\}^N$ de la manière suivante :

— on considère un entier $I \in \{1, \dots, N\}$ choisi uniformément au hasard, indépendant de X,
— pour tout $j \neq I$, on pose $X'_j = X_j$,
— la loi de X'_I est définie comme suit : pour $1 \leq i_0 \leq N$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1,1\}^N$:

$$\mathbb{P}\left(X'_I = 1 \mid I = i_0,\ X_j = \sigma_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N\right) = \frac{1}{C} \exp\left(\beta h + \frac{\beta}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{N} \sigma_j\right)$$

et

$$\mathbb{P}\left(X'_I = -1 \mid I = i_0,\ X_j = \sigma_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N\right) = \frac{1}{C} \exp\left(-\beta h - \frac{\beta}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{N} \sigma_j\right),$$

où C est une constante qui dépend de i_0, de $(\sigma_j)_{j \neq i_0}$, de β, h et de N.

(25a) Calculer la valeur de C.

$X'_I = 1$ ou -1 de manière exclusive, donc pour la loi de probabilité conditionnée à $I = i_0$ et $X = \sigma$, on a

$$\mathbb{P}\left(X'_I = 1 \mid I = i_0, X = \sigma\right) + \mathbb{P}\left(X'_I = -1 \mid I = i_0, X = \sigma\right) = 1$$

c'est-à-dire que

$$\frac{2\cosh\left(\beta h + \frac{\beta}{N}\sum_{j \neq i_0} \sigma_j\right)}{C} = \frac{e^{\beta h + \frac{\beta}{N}\sum_{j \neq i_0} \sigma_j} + e^{-\beta h - \frac{\beta}{N}\sum_{j \neq i_0} \sigma_j}}{C} = 1$$

Donc

$$C = 2\cosh\left(\beta h + \frac{\beta}{N} \sum_{j \neq i_0} \sigma_j\right)$$

(25b) Montrer que (X, X') est un couple échangeable.

On remarque alors que pour tout $\sigma, \sigma' \in \{-1,1\}^N$, on a

$$\mathbb{P}(X = \sigma \cap X' = \sigma') = \mathbb{P}(X = \sigma' \cap X' = \sigma)$$

En effet, si $\sigma = \sigma'$, les deux expressions sont formellement identiques, et c'est trivial. Si σ et σ' diffèrent en au moins deux indices distincts, les deux probabilités précédentes sont nulles (car on ne change un spin qu'en au plus un site). Et si σ et σ' diffèrent exactement en un indice, appelons le i_0 de sorte que $\sigma_{i_0} = -\sigma'_{i_0}$; pour obtenir $X' = \sigma'$ à partir de $X = \sigma$, il faut tirer $I = i_0$ puis tirer l'inversion $X'_I = -X_I$, autrement dit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=\sigma\cap X'=\sigma') &= \mathbb{P}(X=\sigma\cap X'=\sigma'\cap I=i_0)\\
&= \mathbb{P}(I=i_0\cap X=\sigma)\mathbb{P}(X'_I=-X_I|I=i_0,X=\sigma)\\
&= \mathbb{P}(I=i_0)\mathbb{P}(X=\sigma)\mathbb{P}(X'_I=-X_I|I=i_0,X=\sigma) \quad \text{car } I \text{ est indépendant de } X\\
&= \mathbb{P}(I=i_0)\mathbb{P}(X=\sigma)\frac{e^{-\sigma_{i_0}(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i_0}\sigma_j)}}{2\cosh\left(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i_0}\sigma_j\right)} \quad \text{par question } 25a\\
&= \mathbb{P}(I=i_0)\mathbb{P}(X=\sigma)\mathbb{P}\left(X_{i_0}=-\sigma_{i_0}\mid (X_j)_{j\neq i_0}=(\sigma_j)_{j\neq i_0}\right) \quad \text{par le début de la 24}\\
&= \mathbb{P}(I=i_0)\mathbb{P}(X=\sigma)\frac{\mathbb{P}(X=\sigma')}{\mathbb{P}((X_j)_{j\neq i_0}=(\sigma_j)_{j\neq i_0})} \quad \text{car } \sigma'_{i_0}=-\sigma_{i_0} \text{ et } \sigma'_j=\sigma_j \text{ sinon}\\
&= \mathbb{P}(I=i_0)\frac{\mathbb{P}(X=\sigma)\mathbb{P}(X=\sigma')}{\mathbb{P}(X=\sigma)+\mathbb{P}(X=\sigma')} \quad \text{par probabilités totales}\\
&= \mathbb{P}(X=\sigma'\cap X'=\sigma) \quad \text{par la symétrie en } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ de l'expression précédente}
\end{aligned}$$

Pour le passage "début de la 24", on a identifié le $\frac{e^{-\sigma_{i_0}(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i_0}\sigma_j)}}{2\cosh\left(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i_0}\sigma_j\right)}$ à la probabilité qui suit du fait du premier calcul fait au début de la question 24.
Ceci montre que (X,X') a la même loi que (X',X), i.e. que (X,X') est échangeable.

(26) On note $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_N)$, $\sigma'=(\sigma'_1,\dots,\sigma'_N)$ et on pose $F(\sigma,\sigma')=\sum_{i=1}^N(\sigma_i-\sigma'_i)$. Donner une expression de la fonction φ telle que $\mathbb{E}[F(X,X')\mid X]=\varphi(X)$.

Comme $X'_j=X_j$ pour tout $j\neq I$, on a $F(X,X')=\sum_{i=1}^N(X_i-X'_i)=X_I-X'_I$ et donc $\mathbb{E}[F(X,X')|X]=\mathbb{E}[X_I-X'_I\mid X]$.

Comme I est uniforme indépendant de X, $\mathbb{E}[X_I|X]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i=m(X)$.

D'autre part, conditionnellement à X et à $I=i$, par la définition de X'_i (en distinguant juste selon $X'_i=X_i$ ou $-X_i$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X'_I|X,I=i]=\mathbb{E}[X'_i|X,I=i] &= X_i\frac{e^{X_i(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i}X_j)}}{2\cosh\left(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i}X_j\right)}-X_i\frac{e^{-X_i(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i}X_j)}}{2\cosh\left(\beta h+\frac{\beta}{N}\sum_{j\neq i}X_j\right)}\\
&= \tanh(\beta m_i(X)+\beta h) \quad \text{car ceci vaut pour } X_i=1 \text{ et } -1
\end{aligned}$$

Ainsi, du fait de l'indépendance de I et X, on obtient en découpant selon la valeur que prend I que $\mathbb{E}[X'_I\mid X]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X'_I|X,I]|X\right]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}[X'_I|X,I=i]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)$.

Au total,

$$\varphi(X)=m(X)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)$$

(27) Montrer que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)\right|\leq\frac{\beta}{N}$$

et en déduire que pour tout $t\geq 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(|m(X)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\geq\frac{\beta}{N}+\frac{t}{\sqrt{N}}\right)\leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right).$$

Comme $m_i(X)=m(X)-\frac{X_i}{N}$, on a $\underline{|m_i(X)-m(X)|\leq\frac{1}{N}}$. Comme la fonction $\tanh$ est 1-lipschitzienne (puisque $|\tanh'(x)|=\frac{1}{\cosh^2(x)}\leq 1$), pour tout $1\leq i\leq N$,

$$|\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\leq\beta|m_i(X)-m(X)|\leq\frac{\beta}{N}$$

de sorte que par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)\right|&\leq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\\&\leq\frac{\beta}{N}\end{aligned}$$

Comme d'après la question 26, $\varphi(X)=m(X)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)$, on a $\underline{|m(X)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\leq|\varphi(X)|+\frac{\beta}{N}}$, et donc l'inclusion

$$\left\{|m(X)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\geq\frac{\beta}{N}+\frac{t}{\sqrt{N}}\right\}\subset\left\{|\varphi(X)|\geq\frac{t}{\sqrt{N}}\right\}$$

ce qui entraîne $\mathbb{P}\left(|m(X)-\tanh(\beta m(X)+\beta h)|\geq\frac{\beta}{N}+\frac{t}{\sqrt{N}}\right)\leq\mathbb{P}(|\varphi(X)|\geq\frac{t}{\sqrt{N}})$.
On applique alors la partie 2.2 au couple échangeable (X,X') avec $F(\sigma,\sigma')=\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i-\sigma_i')$ qui est bien antisymétrique et bornée (de plus, φ joue le rôle de ϕ). Majorons $\Delta(X)$. Comme un seul spin change, $\underline{|F(X,X')|=|X_I-X_I'|\leq 2}$. On a alors

$$\Delta(X)=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[|(\varphi(X)-\varphi(X'))F(X,X')|\mid X\right]\leq\mathbb{E}\left[|\varphi(X)-\varphi(X')|\mid X\right]$$

De même que pour la majoration de $|F|$, comme les sommes sur X et X' diffèrent d'au plus un terme, on a $\underline{|m(X)-m(X')|\leq\frac{2}{N}}$ et $\underline{|m_i(X)-m_i(X')|\leq\frac{2}{N}}$ pour tout $1\leq i\leq N$. Comme $\tanh$ est 1-lipschitzienne, on en déduit que pour tout $1\leq i\leq N$,

$$|\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m_i(X')+\beta h)|\leq\beta|m_i(X)-m_i(X')|\leq\frac{2\beta}{N}$$

et donc par inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}|\varphi(X)-\varphi(X')|&=\left|m(X)-m(X')-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m_i(X')+\beta h))\right|\\&\leq|m(X)-m(X')|+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\tanh(\beta m_i(X)+\beta h)-\tanh(\beta m_i(X')+\beta h)|\\&\leq\frac{2}{N}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{2\beta}{N}=\frac{2(1+\beta)}{N}\end{aligned}$$

On en déduit que $\underline{\Delta(X) \leq \frac{2(1+\beta)}{N}}$ presque sûrement. On peut alors appliquer la question 17 avec $\underline{B = 0}$ et $\underline{C = \frac{2(1+\beta)}{N}}$ qui donne pour tout $t \geq 0$:

$$\underline{\mathbb{P}\left(|\varphi(X)| \geq \frac{t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{(t/\sqrt{N})^2}{2C}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right)}$$

Au total, on a bien l'inégalité voulue :

$$\mathbb{P}\left(|m(X) - \tanh(\beta m(X) + \beta h)| \geq \frac{\beta}{N} + \frac{t}{\sqrt{N}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4(1+\beta)}\right)$$