CONCOURS X-ENS
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES A
SESSION 2026 - FILIÈRES MP-MPI

m.laamoum2@gmail.com[1]

Préliminaires

1) L'application $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^n & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \|Ax\|\end{array}\right.$ est continue sur la sphère unité $S(0,1)$, qui est compacte (fermée et bornée de $\mathbb{C}^n$), donc elle est bornée et atteint son maximum (en un $x_0 \in S(0,1)$) ; ce qui définit $\|\!|A|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Pour $x \neq 0$, posons $u = \frac{1}{\|x\|}x \in S$; alors

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|Au\| \leq \|\!|A|\!\|\,,$$

donc l'ensemble $\mathcal{N} = \left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$ est borné et $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|\!|A|\!\|$.

En particulier pour x_0

$$\|\!|A|\!\| = \|Ax_0\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

et $\|\!|A|\!\| \in \mathcal{N}$, donc $\boxed{\|\!|A|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}}$.

(On peut aussi le faire par continuité de l'application linéaire $x \mapsto Ax$)

2) Soit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

Pour $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ de norme 1, on a $Ax = {}^t(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ donc

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_i} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq \max_i |\lambda_i|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2.$$

Soit k tel que $\lambda_k = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2$, on a $\|Ae_k x\|^2 = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|^2$. Donc $\boxed{\|\!|A|\!\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}$.

3) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. D'après Q1 on a pour $x \in \mathbb{C}^n$: $\|Ax\| \leq \|\!|A|\!\| . \|x\|$.
Soit $x \in S(0,1)$, on a

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|\!|A|\!\|\, \|Bx\| \leq \|\!|A|\!\|\, \|\!|B|\!\|\, \|x\|.$$

donc pour tout $x \in S(0,1)$ on a $\|ABx\| \leq \|\!|A|\!\|\, \|\!|B|\!\|$, ainsi $\boxed{\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\, \|\!|B|\!\|}$.

4) U unitaire signifie $U^*U = \mathrm{I}_n$,

[1] `https://tinyurl.com/4up84xze`

15-04-2026

- Soit $x \in \mathbb{C}^n$:
$$\|Ux\|^2 = \langle Ux \mid Ux\rangle = \langle x \mid U^*Ux\rangle = \langle x \mid x\rangle = \|x\|^2,$$
donc $\|Ux\| = \|x\|$ (U est isométrique).
Ainsi $\boxed{\|\!|U|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ux\| = 1}$. De même on a U^* est isométrique et $\|\!|U^*|\!\| = 1$.
- On a $\|\!|AU|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|AUx\|$. Comme U est bijective et isométrique, lorsque x parcourt $S(0,1)$, alors Ux parcourt $S(0,1)$. Par changement de variable $y = Ux$ on obtient
$$\|\!|AU|\!\| = \sup_{\|U^*y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|\!|A|\!\|\,.$$
- On a $\|\!|UA|\!\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|UAx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ car U est une isométrie, donc $\|\!|UA|\!\| = \|\!|A|\!\|$.

5) Soit $p \in \mathbb{C}[X]$.

- Posons $A = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $p(A) = P\,p(D)\,P^{-1}$.
Soit $\lambda_i \in \sigma(A)$ et v_i le vecteur propre associé .
Alors $p(A)v_i = p(\lambda_i)v_i$, donc
$$\frac{\|p(A)v_i\|}{\|v_i\|} = |p(\lambda_i)| \leq \|\!|p(A)|\!\|\,.$$
Par suite $\boxed{\|p\|_{\sigma(A)} .= \sup\limits_{\alpha\in\sigma(A)} |p(\alpha)| \leq \|\!|p(A)|\!\|}$.
- D'après la questions 3 :
$$\|\!|p(A)|\!\| = \left\|\!\left| P\,p(D)\,P^{-1} \right|\!\right\| \leq \|\!|P|\!\|\ \|\!|p(D)|\!\|\ \left\|\!\left|P^{-1}\right|\!\right\| = \operatorname{cond}(P)\ \|\!|p(D)|\!\|\,.$$
Or, par la question 2, $\|\!|p(D)|\!\| = \max\limits_i |p(\lambda_i)| = \|p\|_{\sigma(A)}$, donc $\boxed{\|\!|p(A)|\!\| \leq \operatorname{cond}(P)\ \|p\|_{\sigma(A)}}$.

A – Principe du maximum pour les polynômes

6) Soit $n \geqslant 2$, $z \in \mathbb{D}$ et $s = \sqrt{1-|z|^2}$ donc $\overline{s} = s$. La matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est :
$$U = \begin{pmatrix} z & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ s & -\overline{z} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
Soit $x \in\ {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On a
$$Ux = {}^t(zx_1 + sx_2, x_3 \ldots, x_n, sx_1 - \overline{z}x_2)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Ux\|^2 &= (zx_1+sx_2)\left(\overline{zx_1+sx_2}\right)+(sx_1-\overline{z}x_2)\left(\overline{sx_1-\overline{z}x_2}\right)+\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\\
&= \left(|zx_1|^2+|sx_2|^2+zx_1s\overline{x_2}+sx_2\overline{zx_1}\right)+\left(|sx_1|^2+|zx_2|^2-sx_1z\overline{x_2}-\overline{z}x_2s\overline{x_1}\right)+\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\\
&= \left(|x_1|^2+|x_2|^2\right)\left(|z|^2+s^2\right)+\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\\
&= \|x\|^2 \ \text{(car } |z|^2+s^2=1 \text{)}
\end{aligned}$$

Ainsi U est unitaire.

7) On note que pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\mathrm{e}_1^*Me_1=M_{1,1}$ (le coefficient d'indice $(1,1)$) . Il suffit de montrer que le coefficient $(1,1)$ de U^k est z^k pour tout $k\geq 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $k\geq 1$, U^k est ,par blocs, de la forme :

$$U^k=\left(\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix} z^k & z^{k-1}s\\ 0 & 0\end{pmatrix} & A_k\\ \hline B_k & C_k\end{array}\right)$$

C'est vrai pour $k=1$ et le passage de k à $k+1$ est immédiat .

Ainsi pour tout $k\geq 0$ $(U^k)_{1,1}=z^k$. Donc pour $p=\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_kX^k$:

$$\mathrm{e}_1^*\,p(U)\,\mathrm{e}_1=\sum_{k=0}^{n-1}p_k\,\mathrm{e}_1^*U^k\mathrm{e}_1=\sum_{k=0}^{n-1}p_kz^k=p(z).$$

8) On a :

$$|p(z)|=|\mathrm{e}_1^*p(U)\mathrm{e}_1|=|\langle p(U)\mathrm{e}_1\mid \mathrm{e}_1\rangle|\leq\|p(U)\mathrm{e}_1\|\,\|\mathrm{e}_1\|\leq|\!|\!|p(U)|\!|\!|\,.$$

Comme U est unitaire donc elle est diagonalisable, $U=V\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,V^{-1}$ avec V unitaire et $|\lambda_i|=1$. Donc $p(U)=V\,\mathrm{diag}(p(\lambda_1),\ldots,p(\lambda_n))\,V^{-1}$.

Puisque V est unitaire, par la question 5 :

$$|\!|\!|p(U)|\!|\!|\leq\mathrm{cond}(V)\|p\|_{\sigma(U)}$$

comme

$$\mathrm{cond}(V)=|\!|\!|V|\!|\!|\cdot|\!|\!|V^*|\!|\!|=1$$

et

$$\|p\|_{\sigma(U)}=\max_i|p(\lambda_i)|\leq\sup_{|\lambda|=1}|p(\lambda)|=\|p\|_{\partial\mathbb{D}}\,.$$

alors $\boxed{|p(z)|\leqslant|\!|\!|p(U)|\!|\!|\leqslant\|p\|_{\partial\mathbb{D}}}$.

9) On a $|z|<1$ donc $s>0$.

- Supposons par l'absurde que $|p(z)|=\|p\|_{\partial\mathbb{D}}$, donc $|p(z)|=|\!|\!|p(U)|\!|\!|$ et de la question 8

$$|\langle p(U)\mathrm{e}_1\mid\mathrm{e}_1\rangle|=\|p(U)\mathrm{e}_1\|\,\|\mathrm{e}_1\|$$

  c'est le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz (qu'on admet par analogie avec le cas reél !) , donc $p(U)e_1$ est colinéaire à e_1,ce dernier est un vecteur propre de $p(U)$.

- Par récurrence on a tout $k \geq 1$, U^k est de la forme :.
  Observons que si $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ est la base canonique alors :

$$U\mathrm{e}_1 = z\mathrm{e}_1 + s\mathrm{e}_n \ , U\mathrm{e}_2 = s\mathrm{e}_1 - \bar{z}\mathrm{e}_n, U\mathrm{e}_j = \mathrm{e}_{j-1} \text{ pour } 3 \leq j \leq n-1 \ , U\mathrm{e}_n = \mathrm{e}_{n-1}$$

  ce qui donne $U^2\mathrm{e}_1 = z^2\mathrm{e}_1 + zs\mathrm{e}_n + s\mathrm{e}_{n-1}$ et $U^3\mathrm{e}_1 = z^3\mathrm{e}_1 + z^2s\mathrm{e}_n + zs\mathrm{e}_{n-1} + s\mathrm{e}_{n-2}$.
  Par récurrence, on a pour tout $1 \leq k \leq n-1$:

$$U^k\mathrm{e}_1 = z^k\mathrm{e}_1 + s\sum_{j=1}^{k} z^{k-j}\mathrm{e}_{n-j+1}$$

  Donc

$$\begin{aligned} p(U)\mathrm{e}_1 &= a_0\mathrm{e}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\left(z^k\mathrm{e}_1 + s\sum_{j=1}^{k} z^{k-j}\mathrm{e}_{n-j+1}\right) \\ &= p(z)\mathrm{e}_1 + s\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k} a_k z^{k-j}\mathrm{e}_{n-j+1} \end{aligned}$$

  remarquons que

$$(1 \leq k \leq n-1 \text{ et } 1 \leq j \leq k) \Leftrightarrow (1 \leq j \leq n-1 \text{ et } j \leq k \leq n-1)$$

  ce qui permet d'inverser l'ordre des sommes dans le second terme :

$$p(U)\mathrm{e}_1 = p(z)\mathrm{e}_1 + s\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=j}^{n-1} a_k z^{k-j}\right)\mathrm{e}_{n-j+1}$$

- Puisque e_1 est un vecteur propre de $p(U)$, la famille $(\mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n)$ étant libre et $s > 0$, alors :

$$p(U)\mathrm{e}_1 = p(z)\mathrm{e}_1 \text{ et } \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \sum_{k=j}^{n-1} a_k z^{k-j} = 0$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_1 & +a_2 z & +\ldots & +a_{n-2}z^{n-3} & +a_{n-1}z^{n-2} & = 0 \\ & a_2 & +\ldots & +a_{n-2}z^{n-2} & +a_{n-1}z^{n-1} & = 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-2} & +a_{n-1}z & = 0 \\ & & & & a_{n-1} & = 0 \end{array}\right.$$

C'est un système triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale , qui admet une solution nulle unique : $a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$.
Le polynôme p est donc nécessairement constant , or il est de degré $n-1$ et $n \geq 2$, ce qui est absurde .
Ainsi si $|z| < 1$, alors $|p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$, ce qui signifie que le maximum de p sur $\mathbb{D}$ est atteint sur le bord $\partial\mathbb{D}$.

10) Soit S un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$

L'inclusion $\partial S \subset S$ donne $\|p\|_{\partial S} \leq \|p\|_S$.

Montrons l'inégalité inverse. Soit $x_0 \in S$ tel que $\|p\|_S = |p(x_0)|$ (le sup est atteint car S est compact et p continue).

Si $x_0 \in \partial S$, on a terminé. Sinon $x_0 \in S \setminus \partial S$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(x_0, \delta) \subset S$. Soit $q : z \mapsto p\,(\delta z + x_0)$ définit sur $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$, q admet donc sont sur maximum en 0 , ce qui contredit la question 9 , le maximum est sur $\partial\mathbb{D}$.

Donc le maximum de $|p|$ sur S est nécessairement atteint sur ∂S, d'où $\|p\|_S \le \|p\|_{\partial S}$.

Ainsi $\boxed{\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}}$.

B – Inégalité de Von Neumann

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une contraction ; $\|\!|A|\!\| \le 1$, et $p \in \mathbb{C}[X]$.

11) Si A est unitaire, $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, U^{-1}$ avec U unitaire et $|\lambda_i| = 1$. Donc par la question 5 avec $\operatorname{cond}(U) = 1$:

$$\|\!|p(A)|\!\| = \|p\|_{\sigma(A)} .$$

Comme $\sigma(A) \subset \partial\mathbb{D}$ alors :

$$\|p\|_{\sigma(A)} = \max_i |p(\lambda_i)| \le \sup_{|z|=1} |p(z)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}} \le \|p\|_{\mathbb{D}} .$$

d'où $\boxed{\|\!|p(A)|\!\| \leqslant \|p\|_{\partial\mathbb{D}} \le \|p\|_{\mathbb{D}}}$.

12) On a $(\mathrm{I}_n - A^*A)^* = \mathrm{I}_n - A^*A$ donc elle est hermitienne . Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. On écrit $\mathrm{I}_n - A^*A = V \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, V^{-1}$ avec $\mu_i \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle (\mathrm{I}_n - A^*A)x \mid x\rangle = \|x\|^2 - \|Ax\|^2$$

comme $\|\!|A|\!\| \le 1$ alors $\|x\|^2 - \|Ax\|^2 \ge 0$. Donc $\mathrm{I}_n - A^*A$ est hermitienne positive !, ce qui donne pour x vecteur propre associé à μ_i que $\mu_i \ge 0$. On pose alors $D_A = V \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n})\, V^{-1}$.
De même on définit D_{A^*} avec $D_{A^*}^2 = \mathrm{I}_n - AA^*$.

13) Les valeurs propres de A^*A sont les $\mu_i \ge 0$, et D_A a pour valeurs propres les $\sqrt{\mu_i}$. Par interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ pour tout i.
Alors $q(A^*A) = V \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n})\, V^{-1} = D_A$.
On a $\sigma\,(AA^*) = \sigma\,(A^*A)$ donc $D_{A^*} = q(AA^*)$.
En effet $\sigma\,(AA^*) = \sigma\,(A^*A)$ car $\chi_{AA^*} = \chi_{A^*A}$ (en utilisant densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est un exercice classique des evn) , ou bien directement :
L'égalité des déterminants $\det(A^*A) = |\det(A)|^2 = \det(AA^*)$ assure que 0 est valeur propre de A^*A si et seulement si elle l'est de AA^*.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si λ est valeur propre de A^*A, il existe $x \neq 0$ tel que $A^*Ax = \lambda x$ donc $AA^*(Ax) = \lambda(Ax)$. Comme $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$, on a $Ax \neq 0$ (sinon $A^*Ax = 0$, absurde). Ainsi λ est valeur propre de AA^*. Par symétrie, $\sigma(A^*A) = \sigma(AA^*)$.

14) On a $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on a par récurrence : $A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*$.

- C'est vrai pour $k = 0$.

- Supposons le pour $k \geq 1$, donc

$$A^*(AA^*)^{k+1} = A^*(AA^*)(A^*A)^k = (AA^*)\left[A^*(A^*A)^k\right]$$

l'hypothèse de récurrence donne

$$A^*(AA^*)^{k+1} = (AA^*)\left[(A^*A)^k A^*\right] = (A^*A)^{k+1}A^*$$

D'où le résultat pour tout $k \geq 0$.
Par linéarité on a : $A^*q(AA^*) = q(A^*A)A^*$, et $A^*D_{A^*} = D_A A^*$.

De même, on montre : pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A(A^*A)^k = (AA^*)^k A$, ce qui donne $AD_A = D_{A^*}A$.

15) Soit $U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ **,** donc $U^* = \begin{pmatrix} A^* & -D_A \\ D_{A^*} & A \end{pmatrix}$.
Par suite

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^*A + D_A^2 & A^*D_{A^*} - D_A A \\ D_{A^*}A - AD_A & D_{A^*}^2 + AA^* \end{pmatrix}.$$

On vérifie :

- $A^*A + D_A^2 = A^*A + (\mathrm{I}_n - A^*A) = \mathrm{I}_n$.
- $D_{A^*}^2 + AA^* = (\mathrm{I}_n - AA^*) + AA^* = \mathrm{I}_n$.
- $A^*D_{A^*} - D_A A^* = 0$ et $D_{A^*}A - AD_A = 0$ (par la question 14).

Donc $U^*U = \mathrm{I}_{2n}$ et U est unitaire.

16) On considère la matrice $U_k \in \mathscr{M}_{(k+2)n}(\mathbb{C})$:

$$U_k = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0_n & & & 0_n & \mathrm{I}_n \\ -D_A & A^* & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix}.$$

Par analogie avec la question 6, on fait des produits par blocs , pour montrer que U_k est unitaire.
On a par récurrence que pour tout $j \geq 0$, $(U_k)^j$ est de la forme :..

$$(U_k)^j = \begin{pmatrix} A^j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$$

Donc our $p = \sum\limits_{j=0}^{k+1} p_j X^j$

$$p(U_k) = \begin{pmatrix} p(A) & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Il suffit de montrer, dans notre cas, que la norme d'une sous-matrice (carrée) est inférieure à la norme de la matrice.
Pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, définissons $v = {}^t({}^t x, 0_{n,1}, \ldots, 0_{n,1}) \in \mathbb{C}^{(k+2)n}$. On a clairement $\|v\| = \|x\|$.

Le produit matriciel donne $p(U_k)v = {}^t({}^t(p(A)x), {}^t y_2, \dots, {}^t y_{k+1})$.
Par définition de la norme euclidienne :

$$\|p(U_k)v\|^2 = \|p(A)x\|^2 + \sum_{i=2}^{k+2} \|y_i\|^2 \geq \|p(A)x\|^2$$

Par définition de la norme subordonnée :

$$|||p(U_k)||| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|p(U_k)X\|}{\|X\|} \geq \frac{\|p(U_k)v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|p(A)x\|}{\|x\|}$$

Ceci est valable pour tout $x \neq 0$ donc $|||p(A)||| \leq |||p(U_k)|||$.
Ainsi : $\boxed{|||p(A)||| \leq |||p(U_k)||| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.}$

17) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

- Si $|||A||| = 0$ alors $A = 0$ et $|||p(A)||| = |p(0)| = \|p\|_{\mathbb{D}(0,0)}$.
- Si $|||A||| > 0$, posons $B = \frac{1}{|||A|||}A$. On a $|||B||| = 1$, donc B est une contraction.
  Pour $p \in \mathbb{C}[X]$ posons $q(X) = p(|||A||| \cdot X)$. Par l'inégalité de Von Neumann on a :

  $$|||q(B)||| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

  Or $q(B) = p(A)$ et $\|q\|_{\mathbb{D}} = \sup_{|w| \leq 1} |p(|||A|||\ w)| = \|p\|_{\mathbb{D}(0,|||A|||)}$. Donc $\boxed{|||p(A)||| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0,|||A|||)}}$.

C – Hausdorffien et rayon numérique

18) Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et v un vecteur propre associé de norme 1. Alors :

$$\langle Av \mid v\rangle = \langle \lambda v \mid v\rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda.$$

Donc $\lambda \in \mathcal{H}(A)$ et $\boxed{\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)}$.

19) Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Posons $\operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}_+\}$.

- Pour $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ de norme 1 on a :

  $$\langle Dx \mid x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2.$$

  Comme $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ alors $\langle Dx \mid x\rangle \in \operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mathcal{H}(A) \subset \operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Soit $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \in \operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pour $x = {}^t(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ on a $y = \langle Dx \mid x\rangle \in \mathcal{H}(A)$, donc $\operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathcal{H}(A)$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathcal{H}(A)}$.

20) Par le théorème de réduction, $A = UDU^{-1}$ avec U unitaire et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Pour x de norme 1, $y = U^*x$ vérifie $\|y\| = 1$ et $\langle Ax \mid x\rangle = \langle Dy \mid y\rangle$. Donc $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(D) = \operatorname{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Si A unitaire alors $|\lambda_i| = 1$, donc $\mathcal{H}(A)$ est un polygone convexe inscrit dans le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.
- A hermitienne : les valeurs propres sont réelles, donc $\mathcal{H}(A) = [\min_i \lambda_i, \max_i \lambda_i] \subset \mathbb{R}$.

21) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{i\theta} \\ b\mathrm{e}^{i\varphi} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a^2 + b^2 = 1$. On a

$$Ax = \begin{pmatrix} b\mathrm{e}^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle Ax \mid x\rangle = a\, b\mathrm{e}^{i(\theta-\varphi)}.$$

Donc $\mathcal{H}(A) = \{ab\mathrm{e}^{i\alpha} \mid a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 = 1,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- On a $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- Soit $z = r\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, montrons qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $r = a\sqrt{1-a^2}$.
  On a $r = x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + r^2 = 0$. On calcul $\Delta = 1 - 4r^2 \geq 0$ donc $x = \dfrac{1 - \sqrt{1-4r^2}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 + \sqrt{1-4r^2}}{2}$.
  Donc la valeur de a chercée est $a = \dfrac{1 - \sqrt{1-4r^2}}{2} \in [0,1]$ .D'où $\mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathcal{H}(A)$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)}$.

22)
- L'application $\varphi : x \mapsto \langle Ax \mid x\rangle$ est continue :
  Ce résultat n'est pas évident car l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ n'est pas bilinéaire ! .
  On peut écrire pour $x, y \in \mathbb{C}^n$:
  $$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\langle A(x-y) \mid x\rangle + \langle Ay \mid x-y\rangle| \leq \|A\| .\|x\|.\|y\|.\|x-y\|$$
  ce qui donne la continuité de φ .
- $\mathcal{H}(A)$ est l'image par φ de la sphère unité $S(0,1)$ qui est compacte dans $\mathbb{C}^n$, donc $\mathcal{H}(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$ (l'image continue d'un compact est un compact), ainsi $\mathcal{H}(A)$ fermée et bornée.

23)
- Pour $z = \langle Ax \mid x\rangle \in \mathcal{H}(A)$ avec $\|x\| = 1$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|z| \leq \|Ax\| \leq \|A\|$.
  Donc $r(A) \leq \|A\|$.
- Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$. La formule polarisation (fournie dans l'énoncé) donne :
  $$4|\langle Ax|y\rangle| \leq |\langle A(x+y)|x+y\rangle| + |\langle A(x-y)|x-y\rangle| + |\langle A(x+iy)|x+iy\rangle| + |\langle A(x-iy)|x-iy\rangle|$$
  Or pour tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n$, on a $|\langle Av|v\rangle| \leq r(A)\|v\|^2$ donc :
  $$4|\langle Ax|y\rangle| \leq r(A)\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right)$$
  Comme on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$ alors
  - $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
  - $\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Par suite : $4|\langle Ax|y\rangle| \leq 4r(A)(\|x\|^2+\|y\|^2)$ donc $|\langle Ax|y\rangle| \leq r(A)(\|x\|^2+\|y\|^2)$.
Si l'on choisit x et y unitaire ($\|x\|=\|y\|=1$), on obtient :

$$|\langle Ax|y\rangle| \leq 2r(A)$$

En particulier pour : $\|x\|=1,\ Ax\neq 0$ et $y=\frac{1}{\|Ax\|}Ax$, on a $\|Ax\|\leq 2r(A)$.
Ce qui donne $\|Ax\|\leq 2r(A)$ pour tout x tel que $\|x\|=1$, d'où $\|\!|A|\!\|\leq 2r(A)$.

Ainsi $\boxed{\frac{1}{2}\,\|\!|A|\!\| \leqslant r(A) \leqslant \|\!|A|\!\|}$.

24) On a pour tout $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

- $r(A)\geq 0$ par définition .
- Si $r(A)=0$, alors $0\leqslant \|\!|A|\!\|\leq 2r(A)=0$, donc $\|\!|A|\!\|=0$ et $A=0$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, on a pour $x\in S(0,1)$: $|\langle\lambda Ax|x\rangle|=|\lambda||\langle Ax|x\rangle|\leq|\lambda|r(A)$ donc $|r(\lambda A)\leq|\lambda|r(A)$.
  Comme $r(A)=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle Ax|x\rangle|$ alors il existe x_0 unitaire tel que $r(A)=|\langle Ax_0|x_0\rangle|$.
  Par suite $|\lambda|r(A)=|\langle\lambda Ax_0|x_0\rangle|\leq|r(\lambda A)$. D'où $|r(\lambda A)=|\lambda|r(A)$
- Soit $x\in S(0,1)$, on a

$$|\langle(A+B)x|x\rangle|=|\langle Ax|x\rangle+\langle Bx|x\rangle|\leq|\langle Ax|x\rangle|+|\langle Bx|x\rangle|\leq r(A)+r(B)$$

  ce qui donne $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$.

r est donc une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

25) Prenons $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=A^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. D'après la question 21, $r(A)=1/2$ et $r(B)=1/2$, donc $r(A)r(B)=1/4$.
Comme $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, c'est une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont $\{0,1\}$, d'après la question 20, son Hausdorffien est le segment $[0,1]$, donc $r(AB)=1$ et l'inégalité $r(AB)\leq r(A)r(B)$ est fausse.

26) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

26-a)
- On a

$$1-X^k=-\prod_{\ell=1}^{k}(X-\omega_k^{k-\ell})=-\prod_{\ell=1}^{k}(-\omega_k^{-\ell}).\prod_{\ell=1}^{k}(1-\omega_k^{\ell}X)$$

  et pour $X=0$: $1=-\prod\limits_{\ell=1}^{k}(-\omega_k^{\ell})$, ce qui donne $\boxed{1-X^k=\prod\limits_{\ell=1}^{k}(1-\omega_k^{\ell}X)}$.
- La décomposition en éléments simple de la fraction $\dfrac{1}{1-X^k}$ s'écrit

$$\frac{1}{1-X^k}=\sum_{\ell=1}^{k}\frac{A_k}{1-\omega_k^{\ell}X}$$

  avec

$$A_k=\left[\frac{1-\omega_k^{\ell}X}{1-X^k}\right]_{X=\omega_k^{-\ell}}=\omega_k^{\ell}\left[\frac{X-\omega_k^{-\ell}}{X^k-1}\right]_{X=\omega_k^{-\ell}}=\omega_k^{\ell}\left[\frac{1}{(X^k-1)'}\right]_{X=\omega_k^{-\ell}}=\frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1-X^k} = \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{1-\omega_k^\ell X}$$

Ainsi $\boxed{1 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{k}(1-\omega_k^\ell X)}$

26-b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1. Pour tout $j \in \{1,\dots,k\}$, posons :

$$x_j = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{k}(1-\omega_k^\ell A)x = Q_j(A)x \text{ et } T_j = \|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j\rangle = \langle (I-\omega_k^j A)x_j|x_j\rangle$$

Par définition de x_j et d'après 26-a, on a :

$$(\mathrm{I}_n - \omega_k^j A)x_j = (\mathrm{I}_n - \omega_k^j A)\prod_{\ell\neq j}(\mathrm{I}_n - \omega_k^\ell A)x = (\mathrm{I}_n - A^k)x$$

D'où $T_j = \langle(\mathrm{I}_n - A^k)x|x_j\rangle$. En sommant :

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} T_j = \left\langle (\mathrm{I}_n - A^k)x \middle| \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j\right\rangle$$

Or, $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j = \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Q_j(A)\right)x = \mathrm{I}_n x = x$ d'après 26-a. On en conclut :

$$\boxed{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\|x_j\|^2 - \langle\omega_k^j A x_j|x_j\rangle\right) = \langle(\mathrm{I}_n - A^k)x|x\rangle = 1 - \langle A^k x|x\rangle}$$

26-c) Supposons que $r(A) \leq 1$.

Pour tout vecteur v on a $|\langle Av|v\rangle| \leq \|v\|^2$, par conséquent, pour tout θ, on a $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\langle Av|v\rangle) \leq \|v\|^2$.

Donc pour chaque j :

$$\mathrm{Re}\left(\|x_j\|^2 - \langle\omega_k^j A x_j|x_j\rangle\right) \geq \|x_j\|^2 - |\langle A x_j|x_j\rangle| \geq 0$$

ce qui donne

$$\mathrm{Re}(1 - \langle A^k x|x\rangle) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Re}\left(\|x_j\|^2 - \langle\omega_k^j A x_j|x_j\rangle\right) \geq 0$$

En remplaçant A par $\mathrm{e}^{i\theta}A$, on obtient :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \mathrm{Re}(1 - \mathrm{e}^{ik\theta}\langle A^k x|x\rangle) \geq 0$$

En choisissant θ tel que $\mathrm{e}^{ik\theta}\langle A^k x|x\rangle = |\langle A^k x|x\rangle|$, on conclut que : $|\langle A^k x|x\rangle| \leq 1$.

Ceci étant vrai pour tout x de norme 1, donc $\boxed{r(A^k) \leq 1}$.

26-d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $r(A) = 0$, alors $A = 0$ et le résultat est trivial.

Sinon, posons $B = \frac{1}{r(A)}A$. Alors $r(B) = 1$, et par (c), $\dfrac{r(A^k)}{r(A)^k} = r(B^k) \leq 1$, donc $r(A^k) \leq r(A)^k$.

Ainsi $\boxed{r(A^k) \leq r(A)^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$.

D – Conjecture de Crouzeix

27) Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $p(X) = X$. Alors $p(A) = A$ et $\|p(A)\| = \|A\| = 1$. D'après la question 21, $\mathcal{H}(A) = D(0, \frac{1}{2})$, donc $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \frac{1}{2}$.
On a une égalité dans l'inégalité (1) donc la constante 2 est optimale.

28) Par la question 26.d, $r(A^k) \leq r(A)^k$. La question 23 appliquée à A^kdonne $\left\|A^k\right\| \leq 2\, r(A^k)$.
Donc :

$$\left\|A^k\right\| \leq 2\, r(A^k) \leq 2\, r(A)^k = 2 \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z^k| = 2 \left\|X^k\right\|_{\mathcal{H}(A)} .$$

29) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $z = r(A)e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$, $p(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant r$. On a $p(X) = \mathrm{e}^{i\varphi} q(\mathrm{e}^{-i\theta} X)$ où $q(Y) = \sum\limits_{k=0}^{r} |c_k|\, Y^k$.
Par la questions 28 :

$$\|p(A)\| = \left\|q(\mathrm{e}^{-i\theta} A)\right\| \leq \sum_{k=0}^{r} |c_k|\, \|A\|^k \leq 2 \sum_k |c_k|\, r(A)^k \leq 2\, \|p\|_{\mathcal{H}(A)} .$$

30) **30-a)** Si $A = 0$ c'est trivial. Sinon posons $q(X) = p(r(A)\, X)$ et $B = \frac{1}{r(A)} A$. Alors $r(B) = 1$.
Par Okubo-Ando, il existe X inversible avec $\mathrm{cond}(X) \leq 2$ tel que $C = X^{-1} B X$ est une contraction.
Par Von Neumann : $\|q(C)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}$. Comme $q(B) = X\, q(C)\, X^{-1}$, par la question 5 :

$$\|q(B)\| \leq \mathrm{cond}(X)\, \|q(C)\| \leq 2\, \|q\|_{\mathbb{D}} .$$

Or $q(B) = p(A)$ et $\|q\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}$.
Donc $\boxed{\|p(A)\| \leq 2\, \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}}$.

30-b) Soit $\mathbb{D}(z_0, \rho)$ un disque contenant $\mathcal{H}(A)$, de bord $\mathscr{C} = \partial \mathbb{D}(z_0, \rho)$. Par le principe du maximum (question 10) : $\|p\|_{\mathbb{D}(z_0, \rho)} = \|p\|_{\mathscr{C}}$. Puisque $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(z_0, \rho)$, on a $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} \leq \|p\|_{\mathbb{D}(z_0, \rho)} = \|p\|_{C}$. La conjecture de Crouzeix, question 29 dans le cas particulier considéré, donne : $\boxed{\|p(A)\| \leq 2\, \|p\|_{\mathcal{H}(A)} \leq 2\, \|p\|_{\mathscr{C}}}$.