Mines-Ponts Mathématiques 1 MP 2026 — Proposition de Correction

Équation d'Euler-Lagrange et quelques applications

Remarques préliminaires

- Pour toute question ou remarque, merci de me contacter à l'adresse mathis.melki@ens-paris-saclay.fr.
- Les notations suivent celles de l'énoncé (voir ici).
- N.B. : Je fais des études de physique et non de mathématiques. Les démonstrations qui suivent se veulent les plus complètes possibles, mais il est probable que certaines d'entre elles manquent de rigueur. N'hésitez pas à m'en faire part !

1 Lemme fondamental du calcul variationnel

▷ Question 1

$x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour démontrer la formule demandée.

- Initialisation à $n = 0$: Immédiat ;
- Hérédité : Par dérivation d'une fonction composée, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, \quad P_{n+1}(X) = X^2 \left(P_n(X) - P_n'(X)\right)$$

▷ Question 2

Raisonnons une nouvelle fois par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation à $n = 0$: Puisque $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$, φ est continue sur $\mathbb{R}$;
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que φ soit de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. En particulier, $\varphi^{(n-1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'après la question précédente, et par croissances comparées de l'exponentielle et des polynômes,

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi^{(n)}(x) = 0$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le résultat étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

▷ Question 3

Soient $c < d$ deux réels. La fonction $\psi_{c,d}$ définie comme suit convient :

$$\boxed{\psi_{c,d} : x \mapsto \varphi((c-x)(d-x))}$$

D'après la question précédente, et par composition, $\psi_{c,d}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

▷ Question 4

On prouve le résultat sur (a, b) (intervalle ouvert). C'est suffisant puisque, comme $h(a) = h(b) = 0$, le poids de l'intégrale en a et b est nul.
Démontrons la contraposée. Supposons que f ne soit pas identiquement nulle sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in (a, b)$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Sans perdre de généralité, supposons que $f(x_0) > 0$. Alors, par continuité de f, il existe $\varepsilon, \eta > 0$ tels que pour tout $|x - x_0| \leq \eta$, $f(x) \geq \eta > 0$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h : x \mapsto \frac{\psi_{x_0-\eta,x_0+\eta}(x)}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi_{x_0-\eta,x_0+\eta}(x)\mathrm{d}x}$$

On vient alors de construire une fonction h

- lisse et à support compact (dite "fonction test") ;
- telle que $h(a) = h(b) = 0$;
- d'intégrale égale à 1.

Alors

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)h(x)\mathrm{d}x \geq \varepsilon > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ. Le lemme est alors prouvée.

2 Équation d'Euler-Lagrange

▷ Question 5

Soit $y \in \mathcal{C}$. Alors en particulier, $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$ est continue sur $[x_A, x_B]$. Ainsi, $T(y)$ est bien définie.

▷ Question 6

Par l'absurde, supposons que

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists \varepsilon \in (-\alpha, \alpha) : \quad y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$$

Il est alors équivalent de supposer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n > 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_A, x_B]$. Puisque $[x_A, x_B]$ est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et bornée. Ainsi, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction extractrice ϕ telle que $x_{\phi(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in [x_A, x_B]$.

Alors, par continuité,

$$y_{\varepsilon_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0(l) \in U, \qquad y'_{\varepsilon_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0'(l) \in V$$

Or, U et V sont deux ouverts, donc à partir d'un certain rang,

$$y_{\varepsilon_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)}) \in U, \qquad y'_{\varepsilon_{\phi(n)}}(x_{\phi(n)}) \in V$$

ce qui contredit l'hypothèse.

▷ Question 7

— Pour tout $\varepsilon \in (-\alpha, \alpha)$, $x \mapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ est continue sur $[x_A, x_B]$;

— Pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\varepsilon \mapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(-\alpha, \alpha)$ par composition de f avec la fonction affine $\varepsilon \mapsto y_\varepsilon(x)$;

— Soient $x \in [x_A, x_B]$ et $\varepsilon \in (-\alpha, \alpha)$.

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$$

ainsi,

$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$$

est continue sur $[x_A, x_B]$.

— Puisque $[x_A, x_B]$ est compact, la majoration indépendante de ε de $x \mapsto \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ est obtenue en invoquant le théorème des bornes atteintes.

Par conséquent, le théorème dérivation sous l'intégrale s'applique, et le résultat demandé est démontré.

▷ Question 8

Soit $\varepsilon \in (-\alpha, \alpha)$. Par intégration par partie sur le second terme, et en utilisant les conditions aux bords $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, il vient

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) \right) \eta(x) \mathrm{d}x$$

Or, z_0 est un extremum local de T. Suppons sans perdre en généralité que z_0 est un minimum local. En particulier, $\varphi(0) = T(z_0)$. Ainsi,

— Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\dfrac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \geq 0$;

— Pour tout $\varepsilon < 0$ suffisamment petit, $\dfrac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} \leq 0$;

Par passage à la limite $\varepsilon \to 0$, on tire que pour tout $\varepsilon \in (-\alpha, \alpha)$, $\varphi'(\varepsilon) = 0$. D'où le résultat par passage à la limite $\varepsilon \to 0$ et continuité.

▷ Question 9

On obtient le résultat (équation d'Euler-Lagrange) par l'application du lemme fondamental du calcul variationnel démontré dans la partie 1.

▷ Question 10

Soit $x \in (x_A, x_B)$. Posons

$$E = f(x, z_0(x), z_0'(x)) - z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))$$

Alors,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}(x) &= 0 + z_0'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) + \cancel{z_0''(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))} \\ &\quad - \cancel{z_0''(x)\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))} - z_0'(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right) \\ &= z_0'(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z_0'(x))\right)\right)\end{aligned}$$

et on conclut en invoquant l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} : E = C$$

3 Le chemin le plus court est la ligne droite !

▷ Question 11

Soit $x \in [x_A, x_B]$. Posons

$$f(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

En particulier, on est dans les hypothèses de la question 10. De plus, pour tout $x \in [x_A, x_B]$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{y_0'(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}}$$

Ainsi, d'après l'identité de Beltrami, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [x_A, x_B]$,

$$y_0'(x) = C$$

Par conséquent, $y_0'' = 0$ donc y_0 est une fonction affine.

4 Le chemin le plus rapide est la cycloïde

▷ Question 12

Comme précédemment, on applique l'identité de Beltrami à la fonction définie pour tout $x \in [x_A, x_B]$ par

$$f(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}}$$

La dérivation est élémentaire, et le résultat découle une nouvelle fois de la question 10.

▷ Question 13

— cotan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

— Soit $x \in (0, \pi)$.

$$\operatorname{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$$

ainsi, cotan est strictement monotone sur $(0, \pi)$, d'après le théorème de la bijection, elle est bijective de $(0, \pi)$ dans $\mathbb{R}$;

— D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, il vient :

$$\forall x \in (0, \pi), \quad \operatorname{arccotan}'(x) = \frac{1}{\operatorname{cotan}'(\operatorname{arccotan}(x))} = -\sin^2(\operatorname{arccotan}(x)) = -\frac{1}{1+x^2}$$

▷ Question 14

D'après la question 12, pour tout $x \in [x_A, x_B]$,

$$\begin{aligned} y_0(x)(1 + y_0'(x)) = 2 &\Rightarrow y_0(x)(1 + \operatorname{cotan}^2(\theta(x)/2)) = 2 \\ &\Rightarrow y_0(x) = 2\sin^2(\theta(x)/2) \\ &\Rightarrow y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x)) \end{aligned}$$

▷ Question 15

Soit $x \in [x_A, x_B]$. D'après la question précédente,

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}(x)\ \sin(\theta(x)) = \operatorname{cotan}(\theta(x)/2)$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{2\sin^2(\theta(x)/2)} = \frac{1}{1 - \cos(\theta(x))}$$

Posons $F : \theta \mapsto \theta - \sin(\theta)$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(\theta(x)) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}(x)(1 - \cos(\theta(x))) = 1$$

Par conséquent, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(\theta(x)) = x - c \Rightarrow x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c$$

N.B. : Il s'agit de la solution de problème historique du brachistochrone.

5 Une application à une structure optimale : la caténoïde

▷ Question 16

Une nouvelle fois, on applique l'identité de Beltrami à la fonction définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$f(x, y(x), y'(x)) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}}$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y(x), y'(x)) = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

Par conséquent, il exsite $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$c = y_0(x)\sqrt{1 + y_0'(x)^2} - y_0'(x) \times y_0(x)\frac{y_0'(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} = \frac{y_0(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}}$$

Puisque $y_0(0) = y_0(1) = 1 \neq 0$, on a en particulier que $c \neq 0$.

▷ Question 17

Sur $\mathbb{R}_+$, ch est continue et strictement croissante. Sa valeur en 0 est 1 et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Par le théorème de la bijection, ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty)$. Soit $x \in (1, +\infty)$, d'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, il vient

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

▷ Question 18

Soit $x \in [0, 1]$.

$$y_0'(x) = \pm\sqrt{c^2 y_0^2(x) - 1} \Rightarrow 1 = \pm\frac{\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}x}{\sqrt{c^2 y_0^2(x) - 1}} = \pm\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{argch}(c y_0(x))$$

Ainsi,

$$x - x_0 = \pm\frac{1}{c}\operatorname{argch}(c y_0(x)), \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

De plus, la condition $y_0(0) = y_0(1) = 1$ fixe $x_0 = 1/2$ tel que $c = \operatorname{ch}(c/2)$

$$\boxed{y_0(x) = \frac{1}{c}\operatorname{ch}\left(c\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad c = \operatorname{ch}(c/2)}$$