

## Exercice I

Info

## Exercice II

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On note  $G_X$  la fonction génératrice de  $X$  définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

- 1°. Montrer que  $G_X$  est bien définie sur  $[-1, 1]$ .
- 2°. Si  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , rappeler et démontrer l'expression de  $G_X$ .
- 3°. En utilisant un produit de Cauchy de deux séries entières, démontrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors on a :

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

- 4°. On suppose désormais que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminer la loi de  $Z = X + Y$ .

## PROBLÈME

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes mais les résultats seront utilisés pour la résolution de la partie III.

### Partie I - Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, on pose  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt$  pour tout  $x > 0$ .

- 1°. Démontrer que  $g$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ .
- 2°. Pour tout  $x > 0$ , démontrer que  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du$ . En déduire que  $g$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ .
- 3°. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$ .
- 4°. Démontrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 5°. Calculer  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right)$  pour  $(x, t) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . En déduire que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - y = 0$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 6°. Pour tout  $x > 0$ , déterminer une expression de  $g(x)$ .

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

- 7°. Démontrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.  
 8°. Démontrer que  $F$  est continue sur  $[0, 1]$  et en déduire que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 Pour toute fonction  $u$  continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique, on pose, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

- 9°. Démontrer que  $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 10°. Pour tout  $k, n \in \mathbb{Z}$ , calculer la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt$ .

### Partie III - Applications

On rappelle les notations :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$  et  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ .

- 11°. Calculer  $c_0(F)$ . En utilisant les résultats des parties I et II, calculer  $c_k(F)$  pour tout entier  $k > 0$ .  
 On admettra que  $c_{-k}(F) = c_k(F)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 12°. On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}$ . Démontrer que  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et 1 périodique.  
 On admet le résultat suivant :  
 « Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , 1 périodiques et vérifient  $c_k(u) = c_k(v)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $u = v$  ».  
 13°. Démontrer que  $F = G$ .  
 14°. En déduire la valeur de  $F(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exercice III

1°. On a  $\forall n \in \mathbb{N}; \forall t \in [-1, 1], |P(X = n)t^n| \leq P(X = n)$  et on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$ , donc la série  $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$  converge absolument donc convergente, donc  $G_X$  est bien définie sur  $[-1, 1]$ .

2°.  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

3°. Soit  $t \in ]-1, 1[$ , alors  $G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X + Y = n)t^n$ , or  $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événement, alors par la formule des probabilités totale :

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k; X + Y = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k; Y = n - k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n - k)$$

par l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

Donc  $P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k)$  car si  $k > n$ , alors  $(Y = n - k) = \emptyset$

Les séries  $\sum_{k \geq 0} P(X = k)t^k$  et  $\sum_{k \geq 0} P(Y = k)t^k$  convergent absolument, donc par produit de Cauchy, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} P(X = i)P(Y = j)t^{i+j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} P(X = i)P(Y = j)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n P(X = k; Y = n - k)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X + Y = n)t^n.$$

Donc  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .

4°. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t} e^{-\mu} e^{\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)} e^{(\lambda+\mu)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} t^n$ .

Or  $G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X + Y = n)t^n$ .

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on a alors  $P(X + Y = n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

## Partie I - Calcul d'une intégrale

1°. Soit  $x > 0$  :

- l'application  $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$-\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right| \leq \frac{x}{t^2}$$

-  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $] -\infty, -1]$  et sur  $[1, +\infty[$ .

Donc  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

2°. Posons  $t = xu : dt = xdu$  :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{ixu}}{x^2 + x^2 u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du$$

$$\text{et } \forall x > 0; |g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi.$$

Donc  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

3°.  $-\forall x > 0 : u \mapsto \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$-\forall u \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + u^2} \text{ et } u \mapsto \frac{1}{1 + u^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

$-\forall u \in \mathbb{R} : \forall x > 0 : \left| \frac{e^{ixu}}{1+u^2} \right| \leq \frac{1}{1+u^2}$  et  $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème de convergence dominée s'applique et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \pi$ .

4°.  $-\forall x > 0$ , l'application  $t \mapsto \frac{x}{x^2+t^2} e^{it}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

$-\forall t \in \mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto \frac{x}{x^2+t^2} e^{it}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \right) = e^{it} \frac{x^2+t^2-2x^2}{(x^2+t^2)^2} = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} e^{it}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \right) &= e^{it} \frac{-2x(x^2+t^2)^2 - 4x(x^2+t^2)(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^4} = e^{it} \frac{-2x(x^2+t^2) - 4x(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3} \\ &= e^{it} \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2+t^2)^3} \end{aligned}$$

$-\forall x > 0$ , les applications  $t \mapsto \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} e^{it}$  et  $t \mapsto \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3} e^{it}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $0 < a < b$ ,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall t \in \mathbb{R} \left| \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2} e^{it} \right| \leq \frac{t^2+b^2}{(a^2+t^2)^2} = u(t)$  et

$\left| \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3} e^{it} \right| \leq \frac{2b^3+6bt^2}{(a^2+t^2)^3} = v(t)$ , or les applications  $u$  et  $v$  sont continues et intégrable

sur  $\mathbb{R}$ , le théorème s'applique et  $g$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et  $g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) dt$

5°. On a déjà

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{-2x(x^2+t^2)^2 + 8xt^2(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^4} = \frac{-2x(x^2+t^2) + 8xt^2}{(x^2+t^2)^3} = \frac{-2x^3+6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$$

Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) = 0$$

D'après la question 4) :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) dt. \quad \text{avec ce qui précède} \end{aligned}$$

Deux intégrations par parties donne :

$$\begin{aligned} g''(x) &= - \left[ e^{it} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) dt \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{x^2+t^2} \right) dt \\ &= i \left[ e^{it} \frac{x}{x^2+t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} \frac{x}{x^2+t^2} dt \\ &= g(x) \end{aligned}$$

En effet :  $x > 0$  et  $\left| e^{it} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right) \right| = \frac{2x|t|}{(x^2 + t^2)^2}$  qui tend vers  $0$  en quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ .

De même  $e^{it} \frac{x}{x^2 + t^2}$  tend aussi vers  $0$  en quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ .

6°.  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ .

Donc  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) = ae^x + be^{-x}$ .

Mais  $g$  est bornée sur  $]0, +\infty[$  donc  $a = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$ ; donc  $b = \pi$  alors  $\forall x > 0; g(x) = \pi e^{-x}$

## Partie II - Formule sommatoire de Poisson

7°. Soit  $x \in \mathbb{R}; F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (x+n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-n)^2}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + (x+n)^2} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0 \\ \frac{1}{1 + (x-n)^2} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0 \\ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} &\text{ converge} \end{aligned}$$

Donc  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (x+n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x+1-n)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-n)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (x+n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-n)^2} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Donc  $F$  est 1 périodique :

8°.  $-\forall n \in \mathbb{N}$ ; les applications  $x \mapsto \frac{1}{1 + (x+n)^2}$   $x \mapsto \frac{1}{1 + (x-n)^2}$  sont continues sur  $[0, 1]$ .

$$-\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{1 + (x+n)^2} \leq \frac{1}{1 + n^2} \text{ et } 0 \leq \frac{1}{1 + (x-n)^2} \leq \frac{1}{1 + (n-1)^2}.$$

Donc  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + (x+n)^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (x-n)^2}$  cv normalement donc uniformément sur  $[0, 1]$  car les

séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (n-1)^2}$ . Donc  $F$  est continue sur  $[0, 1]$ .

9°. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ :  $c_k(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi kt} dt$ .

Donc

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f(t+n) + \sum_{n=1}^{\infty} f(t-n) \right] e^{-2i\pi kt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt + \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi kt}}{1 + (t+n)^2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi kt}}{1 + (t-n)^2} dt \end{aligned}$$

Car les deux séries de fonctions convergent uniformément sur  $[0, 1]$  et les applications  $t \mapsto f(t-n) e^{-2i\pi kt}$  et  $t \mapsto f(t+n) e^{-2i\pi kt}$  sont  $\mathcal{C}^0$  sur  $[0, 1]$ .

Avec les changement de variables  $t+n = u$  et  $t-n = u$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 c_k(F) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2} du + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-n}^{-n+1} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2} du \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2} du + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2} du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi ku}}{1+u^2} du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi kt} dt
 \end{aligned}$$

10°.  $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \delta_{0,n+k}$

### Partie III - Applications

11°.  $c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \pi.$

Soit  $k > 0$ ,  $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi kt}}{1+t^2} dt = g(2\pi k) = \pi e^{-2\pi k}.$

12°. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{-2i\pi nx} = \pi + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \cos(2\pi nx).$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|e^{-2\pi n} \cos(2\pi nx)| \leq e^{-2\pi n}$  et la série géométrique  $\sum_{n \geq 1} e^{-2\pi n}$  est convergente, et

puisque les fonctions  $x \mapsto e^{-2\pi n} \cos(2\pi nx)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

les applications  $x \mapsto \cos(2\pi nx)$  sont 1 périodiques, donc  $G$  est 1 périodique.

13°. On sait déjà  $\forall k \in \mathbb{Z}; c_k(F) = \pi e^{-2\pi k}$ , calculons  $c_k(G)$ .

On a  $c_k(G) = \int_0^1 G(t)e^{-2i\pi kt} dt = \int_0^1 \left( \pi + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \cos(2\pi nt) \right) e^{-2i\pi kt} dt.$

Si  $k = 0$ , alors

$c_0(G) = \int_0^1 \left( \pi + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \cos(2\pi nt) \right) dt = \pi + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi nt) dt = \pi$  et ceci

car la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} e^{-2\pi n} \cos(2\pi nt)$  converge normalement donc uniformément sur

$[0, 1]$  et les applications  $t \mapsto e^{-2\pi n} \cos(2\pi nt)$  sont continues pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $k > 0$ , pour les mêmes raisons, on a alors  $\int_0^1 e^{-2i\pi kt} dt = 0$  donc :

$c_k(G) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi nt) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \int_0^1 e^{-2i\pi(k+n)t} + e^{-2i\pi(k-n)t} dt = \pi e^{-2\pi k}$  dont on utilisé la question 10)

Si  $k < 0$ , pour les mêmes raisons, on a alors :

$c_k(G) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi nt) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} \int_0^1 e^{-2i\pi(k+n)t} + e^{-2i\pi(k-n)t} dt = \pi e^{-2\pi k}$  dont on utilisé la question 10)

Donc  $\forall k \in \mathbb{Z}; c_k(G) = \pi e^{-2\pi k} = c_k(F)$ , les fonctions  $F$  et  $G$  sont 1 périodiques et continues sur  $\mathbb{R}$ , d'après le résultat admis :  $F = G$ .

14°. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors :

$F(x) = G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{-2i\pi nx} = \frac{\pi}{1 - e^{-2\pi(1-ix)}} + \frac{\pi e^{-2\pi} e^{-2i\pi x}}{1 - e^{-2\pi(1+ix)}}.$  Donc

$$F(x) = \frac{\pi(1 - e^{-4\pi})}{|1 - e^{-2\pi(1-ix)}|^2}$$