

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2026**

**VENDREDI 17 AVRIL 2026**

**14h00 - 18h00**

**FILIERES MP-MPI**

**Epreuve n° 10**

**INFO-FONDAMENTALE**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour  
cette épreuve***

## Reconfiguration dans les graphes

*Le sujet comporte 12 pages, numérotées de 1 à 12.*

---

### *Début de l'épreuve.*

Ce sujet est consacré à l'étude de deux objets classiques : des colorations de graphes, et des ensembles dominants. Le but n'est pas de calculer ces objets, mais d'étudier les transformations entre eux : peut-on toujours trouver une transformation entre deux objets donnés ? Quelle est sa longueur ?

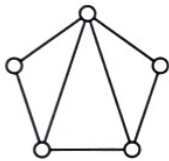
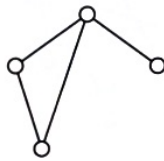
Ce sujet est divisé en cinq parties largement indépendantes. Il est possible de passer librement d'une partie à l'autre.

- La partie I fournit des conditions suffisantes sur l'existence de transformations entre deux colorations.
  - La partie II étudie le graphe des colorations d'un graphe  $G$  donné, un objet qui capture les transformations possibles entre colorations, et vise à montrer que cet objet capture toutes les informations sur  $G$ .
  - La partie III étudie les transformations entre colorations d'un point de vue probabiliste, dans le but de générer aléatoirement uniformément des colorations d'un graphe fixé.
  - La partie IV vise à construire un algorithme efficace pour tester l'existence de transformations entre deux ensembles dominants donnés, dans une classe restreinte de graphes.
  - La partie V considère la variante où on colore les arêtes d'un graphe au lieu de ses sommets, et utilise des transformations pour obtenir une borne sur le nombre total de couleurs nécessaires pour colorer des graphes dans ce cadre.
-

## Notations et définitions

**Description des algorithmes.** Dans toute la suite du sujet, lorsqu'un algorithme est demandé, on en donnera une description à haut niveau, sans nécessairement détailler les lignes de pseudo-code. La complexité des opérations sur les listes et tableaux est celle des structures de données correspondantes en OCaml.

- Un **graphe**  $G$  est défini comme une paire  $(V(G), E(G))$  où  $V(G)$  est un ensemble fini de **sommets** et  $E(G)$  est un ensemble de parties de taille 2 de  $V(G)$  appelées **arêtes**. Quand aucune ambiguïté n'est possible, on s'autorise à écrire respectivement  $V$  et  $E$  à la place de  $V(G)$  et  $E(G)$ , et  $n$  et  $m$  à la place de  $|V(G)|$  et  $|E(G)|$ .
- Lorsque  $\{x, y\} \in E$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont **adjacents**, et on notera  $xy$  l'arête  $\{x, y\}$ . L'arête  $xy$  est **incidente** à  $x$  et  $y$ .
- Le **voisinage**  $N(v)$  d'un sommet  $v$  est l'ensemble  $\{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ . Le **degré**  $\deg(v)$  de  $v$  est  $|N(v)|$ . Le **degré maximum**  $\Delta(G)$  de  $G$  est  $\max_{v \in V(G)} \deg(v)$ .
- On supposera que les graphes sont représentés sous forme de **liste d'adjacence**, c'est-à-dire comme un tableau associant à chaque sommet la liste de ses voisins.
- Un **sous-graphe**  $H$  de  $G$  est un graphe vérifiant  $V(H) \subseteq V(G)$  et  $E(H) \subseteq E(G)$ . Il est de plus **induit** si  $E(H)$  contient exactement les arêtes de  $E(G)$  entre deux sommets de  $V(H)$ . On note alors  $H = G[V(H)]$ .

(a) Un graphe  $G$ (b) Un sous-graphe induit de  $G$ (c) Un sous-graphe de  $G$  non-induit

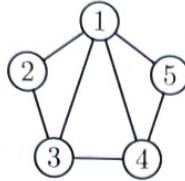
- Si  $X$  est un ensemble de sommets de  $G$ ,  $G - X$  est le graphe induit par  $V(G) \setminus X$ . Si  $X = \{v\}$ , on notera  $G - v$  au lieu de  $G - \{v\}$ .
- Une **composante connexe** d'un graphe  $G$  est un sous-graphe induit par n'importe quel ensemble non vide  $X$  de sommets minimal par inclusion vérifiant  $N(x) \subseteq X$  pour tout  $x \in X$ .
- Un **cycle** de longueur  $k$  est un graphe à  $k$  sommets  $u_1, \dots, u_k$  et contenant les  $k$  arêtes  $u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k, u_ku_1$ .
- Un **chemin** de longueur  $k$  est un graphe à  $k + 1$  sommets  $u_1, \dots, u_{k+1}$  et contenant les  $k$  arêtes  $u_1u_2, \dots, u_ku_{k+1}$ .
- Un sous-ensemble  $X$  de sommets de  $G$  est une **clique** si les sommets de  $X$  sont deux à deux reliés par une arête. Autrement dit, pour toute paire  $x, y \in X$  avec  $x \neq y$ , on a  $\{x, y\} \in E$ .
- Un sous-ensemble  $X$  de sommets de  $G$  est un **ensemble indépendant** si aucune arête ne relie deux sommets de  $X$ . Autrement dit, pour toute paire  $x, y \in X$  avec  $x \neq y$ ,  $\{x, y\} \notin E$ .

- Une  $k$ -**coloration** de  $G$  est une fonction  $\gamma$  de  $V$  dans  $\{1, \dots, k\}$  telle que, pour toute paire de sommets  $x, y$  telle que  $\{x, y\} \in E$ , on a  $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ . Le plus petit entier  $k$  tel qu'il existe une  $k$ -coloration de  $G$  est appelé le **nombre chromatique** de  $G$  et est noté  $\chi(G)$ . Un graphe est  $k$ -**colorable** s'il existe une  $k$ -coloration.
- Un graphe  $G$  est **biparti** si  $\chi(G) \leq 2$ . En particulier, un graphe biparti ne peut pas contenir de cycle impair comme sous-graphe.
- Deux graphes  $(V, E)$  et  $(V', E')$  sont **isomorphes** s'il existe une bijection  $f : V \rightarrow V'$  telle que pour tout  $u, v \in V$ ,  $uv \in E$  si et seulement si  $f(u)f(v) \in E'$ .

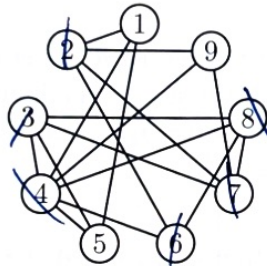
## Partie I

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $d$ -**dégénéré** s'il existe un ordre  $v_1, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  tel que, pour tout  $i \leq n$ , le sommet  $v_i$  a au plus  $d$  voisins parmi  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ . Un tel ordre s'appelle un **ordre de  $d$ -dégénérescence**. La **dégénérescence** de  $G$  est le plus petit entier  $d$  pour lequel  $G$  est  $d$ -dégénéré.

**Question I.1.** Montrer que le graphe suivant est 2-dégénéré.



**Question I.2.** Quelle est la dégénérescence du graphe suivant ?



$A \Rightarrow B$

**Question I.3.** Montrer que si  $G$  contient une clique de taille  $\omega$  alors la dégénérescence de  $G$  est au moins  $\omega - 1$ .

**Question I.4.** Montrer que tout sous-graphe d'un graphe  $d$ -dégénéré est toujours  $d$ -dégénéré.

**Question I.5.** Étant donné un ordre de  $d$ -dégénérescence d'un graphe  $G$ , décrire un algorithme calculant une  $(d + 1)$ -coloration de  $G$  en temps  $O(dn + m)$ .

**Question I.6.** On suppose que  $G$  est toujours  $d$ -dégénéré mais qu'on ne fournit plus un ordre de  $d$ -dégénérescence. Décrire un algorithme qui renvoie en temps polynomial une  $(d + 1)$ -coloration et expliciter sa complexité.

Le **degré moyen** d'un graphe  $G$  est  $2|E(G)|/|V(G)|$ . Le **degré moyen maximum** de  $G$ , noté  $dmm(G)$  est défini par  $\max_{H \text{ sous-graphe de } G} 2|E(H)|/|V(H)|$ .

**Question I.7.** Donner une borne supérieure sur  $\text{dmm}(G)$  en fonction de  $d$  quand  $G$  est un graphe  $d$ -dégénéré.

Étant données deux  $k$ -colorations  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $G$ , une  $k$ -**transformation** de  $\gamma$  à  $\gamma'$  est une suite finie de  $k$ -colorations  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  telle que  $\gamma_1 = \gamma$ ,  $\gamma_p = \gamma'$  et pour tout  $1 \leq i < p$ ,  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$  coïncident sur tous les sommets de  $G$  sauf un. (Dans ce cas, on dit que  $\gamma_{i+1}$  est obtenue à partir de  $\gamma_i$  en **recolorant** l'unique sommet dont la couleur diffère entre  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$ .)

**Question I.8.** Étant donné un ordre de  $d$ -dégénérescence  $v_1, \dots, v_n$  de  $G$ , montrer par récurrence qu'il existe une  $(d+2)$ -transformation entre toute paire de  $(d+2)$ -colorations de  $G$  où chaque  $v_i$  est recoloré au plus  $(d+1)^i$  fois.

Dans le reste de cette partie, on fixe un graphe  $G$  de degré moyen  $\bar{d}$ , et  $d > \bar{d}$  un entier. On ne suppose plus que  $G$  est  $d$ -dégénéré. On note  $\varepsilon = d - \bar{d} > 0$ .

**Question I.9.** Montrer que  $G$  a au moins  $\frac{\varepsilon}{d} \cdot n$  sommets de degré au plus  $d-1$ .

**Question I.10.** Montrer que  $G$  contient un ensemble indépendant  $I$  de taille au moins  $\frac{\varepsilon}{d^2} \cdot n$  où chaque sommet a degré au plus  $d-1$ .

**Question I.11.** En déduire que pour tout entier  $d > 0$  et tout  $\varepsilon \in ]0, d[$ , il existe une constante  $c_{d,\varepsilon}$  telle que pour tout graphe  $G$  de degré moyen maximum  $d - \varepsilon$ ,  $V(G)$  admet une partition en  $r \leq c_{d,\varepsilon} \ln |V(G)|$  ensembles indépendants  $S_1, \dots, S_r$  tels que, pour tout  $i$ , les sommets de  $S_i$  ont au plus degré  $d-1$  dans  $G[\cup_{j=i}^r S_j]$ .

**Question I.12.** Montrer que, pour tout entier  $d > 0$  et tout  $\varepsilon \in ]0, d[$ , dans tout graphe  $G$  de degré moyen  $d - \varepsilon$ , il existe une  $(d+1)$ -transformation entre toute paire de  $(d+1)$ -colorations dont la longueur est un polynôme  $P(n)$ , où le degré de  $P$  et ses coefficients dépendent de  $d$  et  $\varepsilon$ .

## Partie II

Étant donné un graphe  $G$  et un entier  $k \geq \chi(G)$ , on définit le **graphe des  $k$ -colorations**  $\mathcal{C}_k(G)$  de  $G$  comme le graphe dont les sommets sont les colorations de  $G$  utilisant **au plus**  $k$  couleurs, et où deux sommets  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont reliés si et seulement si il existe un unique sommet  $v$  dans  $G$  tel que  $\gamma(v) \neq \gamma'(v)$ . En particulier, une  $k$ -transformation entre deux  $k$ -colorations de  $G$  correspond à un chemin dans  $\mathcal{C}_k(G)$  entre les sommets correspondant à ces deux colorations.

**Question II.1.** Si  $G$  est un chemin à 3 sommets, dessiner  $\mathcal{C}_3(G)$ .

**Question II.2.** Si  $G$  est une clique à  $k$  sommets, décrire  $\mathcal{C}_k(G)$ .

**Question II.3.** En déduire, pour tout entier  $k$ , deux graphes  $G, H$  distincts tels que  $\chi(G) = \chi(H) = k$  et  $\mathcal{C}_k(G) = \mathcal{C}_k(H)$ .

Dans la suite, on fixe un graphe  $G$  et un entier  $k > \chi(G)$ .

**Question II.4.** Montrer que pour toute  $k$ -coloration  $\gamma$  de  $G$ , le graphe induit par le voisinage de  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_k(G)$  est composé d'au plus  $|V(G)|$  composantes connexes, chacune étant une clique.

**Question II.5.** Montrer que si  $\gamma$  est une  $\chi(G)$ -coloration de  $G$ , alors il y a exactement  $|V(G)|$  telles cliques dans  $\mathcal{C}_k(G)$ .

Étant donnée une  $k$ -coloration  $\gamma$  de  $G$ , on note  $\{C_1, \dots, C_{p_\gamma}\}$  les cliques de  $N(\gamma)$  obtenues à la question II.4. On définit  $G_\gamma$  le graphe dont les sommets sont  $C_1, \dots, C_{p_\gamma}$  et tel qu'il y a une arête entre  $C_{i_1}$  et  $C_{i_2}$  si et seulement si il existe  $\gamma_1 \in C_{i_1}$  et  $\gamma_2 \in C_{i_2}$  dont le seul voisin commun dans  $\mathcal{C}_k(G)$  est  $\gamma$ .

**Question II.6.** Montrer qu'il existe  $f : V(G_\gamma) \rightarrow V(G)$  injective telle que pour tout  $u, v \in V(G_\gamma)$  avec  $f(u)f(v) \notin E(G)$ , on a  $uv \notin E(G_\gamma)$ .

**Question II.7.** Si  $\gamma$  est un sommet de  $\mathcal{C}_k(G)$  correspondant à une  $\chi(G)$ -coloration, montrer que  $G$  et  $G_\gamma$  sont isomorphes.

**Question II.8.** En déduire un algorithme qui, étant donné un graphe  $H$  dont on garantit qu'il est de la forme  $\mathcal{C}_k(G)$  pour un certain graphe  $G$  et un certain entier  $k > \chi(G)$ , renvoie  $G$ .

**Question II.9.** Si on garantit de plus que  $k > 2\Delta(G)$ , améliorer votre algorithme pour qu'il ait une complexité polynomiale en  $k$  et la taille de  $G$ .

## Partie III

On s'intéresse à nouveau aux colorations de graphes. Soit  $k$  un entier et  $G$  un graphe  $k$ -colorable de degré maximum  $\Delta$ . On considère la procédure aléatoire **rand** suivante :

---

**Entrée:** Une  $k$ -coloration  $\gamma$  de  $G$

**Sortie:** Une  $k$ -coloration de  $G$

Sélectionner au hasard un sommet  $v \in V(G)$  uniformément.

Sélectionner au hasard une couleur  $r \in \{1, \dots, k\}$  uniformément et indépendamment de  $v$ .

si  $v$  n'a pas de voisin  $w$  tel que  $\gamma(w) = r$  alors

$$\gamma(v) := r$$

renvoyer  $\gamma$

---

**Question III.1.** Montrer que si  $k \geq \Delta + 2$  alors pour toute paire de colorations  $\gamma, \gamma'$ , la probabilité d'obtenir  $\gamma'$  en appliquant un certain nombre de fois **rand** sur  $\gamma$  est strictement positive.

Pour toute paire de colorations  $\gamma, \gamma'$ , on note  $p_{\gamma, \gamma'}$  la probabilité d'obtenir  $\gamma'$  en une application de **rand** sur  $\gamma$ . On note  $P = (p_{\gamma, \gamma'})_{\gamma, \gamma'}$  la matrice de ces probabilités.

**Question III.2.** Montrer que  $P$  est symétrique et que la somme de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes est 1.

Soit  $\pi$  une loi de probabilités sur les colorations, c'est-à-dire un tuple  $(\pi_\gamma)_\gamma$  indexé par les colorations, de somme 1. Choisir une coloration selon la loi  $\pi$  revient à choisir chaque coloration  $\gamma$  avec probabilité  $\pi_\gamma$ . On dit que  $\pi$  est *stationnaire* si quand  $\Gamma$  est une coloration aléatoire de loi  $\pi$ , alors **rand**( $\Gamma$ ) suit la loi  $\pi$ .

**Question III.3.** Montrer que la distribution uniforme  $\pi_U$  est stationnaire.

**Question III.4.** Soit  $v \in \ker(P - I)$  et  $\gamma$  une coloration qui maximise  $v_\gamma$ .  
Montrer que si  $\gamma'$  est une coloration vérifiant  $p_{\gamma, \gamma'} > 0$ , alors  $v_{\gamma'} = v_\gamma$ .

**Question III.5.** En déduire que  $\dim \ker(P - I) \leq 1$  puis qu'il existe une unique distribution stationnaire.

On peut montrer que l'algorithme décrit ci-dessus converge vers l'unique distribution stationnaire (qui est ici uniforme).

**Question III.6.** Montrer que l'espérance du nombre d'étapes nécessaires pour avoir tenté de recolorer au moins une fois chacun des  $n$  sommets est  $n \ln n + o(n \ln n)$ .

On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence vers la distribution stationnaire dans le cadre d'une hypothèse plus forte, à savoir  $k \geq 4\Delta + 1$ . On peut montrer que cette vitesse de convergence est liée au temps de couplage des colorations, défini ci-après.

On s'intéresse au couplage de colorations : fixons dans le reste de la partie  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux  $k$ -colorations quelconques du graphe  $G$ . On fait évoluer ces deux colorations selon la procédure

**rand**, mais à chaque exécution, c'est-à-dire à chaque choix d'un sommet et d'une couleur, on modifie **les deux colorations** selon la procédure décrite. Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , on note  $\gamma_t$  et  $\gamma'_t$  les  $k$ -colorations obtenues respectivement à partir de  $\gamma$  et  $\gamma'$  après  $t$  exécutions de **rand** (avec  $\gamma_0 = \gamma$  et  $\gamma'_0 = \gamma'$ ). Le **temps de couplage** est le plus petit entier  $t$  tel que  $\gamma_t = \gamma'_t$ .

Soit  $X_t$  la variable aléatoire égale au nombre de sommets colorés différemment dans  $\gamma_t$  et  $\gamma'_t$ .

Étant donné une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{N}$  et  $E$  un événement, on définit l'**espérance de  $X$  conditionnellement à l'événement  $E$**  par :

$$\mathbb{E}[X \mid E] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{P}[X = x_i \mid E].$$

**Question III.7.** Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = i + 1 \mid X_t = i) \leq \frac{2i\Delta}{kn}.$$

**Question III.8.** Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbb{E}[X_{t+1} \mid X_t = i] \leq i \cdot \left(1 - \frac{k - 4\Delta}{kn}\right).$$

Soit  $\Psi_t$  une variable aléatoire dont la loi de probabilités est donnée par, pour tout  $0 \leq i \leq n$  :

$$\mathbb{P}(\Psi_t = \mathbb{E}[X_{t+1} \mid X_t = i]) = \mathbb{P}(X_t = i).$$

**Question III.9.** Montrer que  $\mathbb{E}[\Psi_t] = \mathbb{E}[X_{t+1}]$ .

**Question III.10.** En déduire que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[X_t] \leq n \cdot \left(1 - \frac{k-4\Delta}{kn}\right)^t$ .

**Question III.11.** Montrer que pour tout  $t \geq \frac{k}{k-4\Delta} \cdot n \ln(2n)$ ,  $\mathbb{P}(\gamma_t \neq \gamma'_t) \leq 1/n$ . En déduire que la probabilité que le temps de couplage soit inférieur à  $\frac{k}{k-4\Delta} \cdot n \ln(2n)$  tend vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Partie IV

Étant donnés deux ensembles de sommets  $D$  et  $X$  d'un graphe  $G$ , on dit que  $D$  **domine**  $X$  si tout élément de  $X \setminus D$  a un voisin dans  $D$ . Si de plus  $X = V(G)$ , on dit que  $D$  est un **ensemble dominant** de  $G$ . On dit que  $D$  **quasi-domine**  $X$  si tout élément de  $X \setminus D$  sauf au plus un sommet a un voisin dans  $D$ .

Dans cette partie, on fixe un entier  $k \geq 2$ . Un **cœur de  $k$ -domination** est un ensemble  $X$  tel que tout ensemble  $D$  de taille  $k$  qui domine  $X$  est un ensemble dominant de  $G$ .

**Question IV.1.** Soit  $G$  un graphe et  $X$  un ensemble de sommets tel que pour tout  $v \in V(G)$ ,  $|(N(v) \cup \{v\}) \cap X| < \lfloor |X|/k \rfloor$ . Montrer que  $G$  n'admet pas d'ensemble quasi-dominant de  $X$ , et donc d'ensemble dominant, de taille au plus  $k$ .

Dans la suite de cette partie,  $G$  désigne un graphe admettant un ensemble dominant de taille  $k$ . On fixe un entier  $t$  tel que  $G$  est **sans**  $K_{t,t}$ , c'est-à-dire qu'il ne contient pas deux ensembles  $A, B$  de sommets disjoints, chacun de taille  $t$  et tels que tous les sommets  $v \in A$  et  $w \in B$  sont reliés par une arête de  $G$ . (On ne fait aucune hypothèse sur l'existence ou non d'arêtes dont les deux extrémités sont dans  $A$  ou dans  $B$ ).

On considère l'algorithme suivant :

---

**Entrée:** Un graphe  $G$  sans  $K_{t,t}$ , un sous-ensemble  $X$  de  $V(G)$

$Y := X$

$S := \emptyset$

**tant que**  $G$  a un sommet  $v \notin S$  tel que  $|(N(v) \cup \{v\}) \cap Y| \geq \lfloor |Y|/k \rfloor$  **faire**

$S := S \cup \{v\}$

$Y := (N(v) \cup \{v\}) \cap Y$

---

**Question IV.2.** Montrer que si  $X$  est de taille au moins  $2t \cdot k^t$  alors l'algorithme termine après au plus  $t - 1$  itérations de la boucle **tant que**.

Soient  $S$  et  $Y$  les ensembles obtenus à la fin de l'exécution de l'algorithme précédent sur  $G, X$ , lorsque  $X$  est de taille au moins  $2t \cdot k^t$ .

**Question IV.3.** Montrer que tout ensemble de taille au plus  $k$  quasi-dominant  $Y$  intersecte  $S$ .

**Question IV.4.** Soit  $y \in Y$ . Montrer que tout ensemble dominant de  $G - y$  de taille  $k$  est aussi un dominant de  $G$ .

**Question IV.5.** En déduire un algorithme qui, étant donné un graphe sans  $K_{t,t}$  et un entier  $k \geq 2$ , calcule en temps polynomial un cœur de  $k$ -domination de taille au plus  $2t \cdot k^t$ . Démontrer la correction de votre algorithme, par exemple en exhibant un invariant de boucle.

On dit que deux ensembles dominants  $D_1, D_2$  de taille  $k$  sont **adjacents** si on peut transformer l'un en l'autre en modifiant un seul sommet. Autrement dit  $D_1$  et  $D_2$  sont adjacents si et seulement si  $|D_1 \setminus D_2| = |D_2 \setminus D_1| = 1$ . On dit que  $D$  est **reconfigurable** en  $D'$  s'il existe une suite  $D_1, \dots, D_r$  d'ensembles dominants de  $G$  tels que  $D_1 = D$ ,  $D_r = D'$  et pour tout  $i < r$ ,  $D_i, D_{i+1}$  sont adjacents.

Soient  $G$  un graphe sans  $K_{t,t}$ , puis  $D$  et  $D'$  deux ensembles dominants de  $G$  de taille  $k$ , et  $X$  un cœur de  $k$ -domination de  $G$ . On définit une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $V(G) \setminus X$  par  $u \sim v$  si  $N(u) \cap X = N(v) \cap X$ .

**Question IV.6.** Soient  $u$  et  $v$  deux sommets distincts de  $G - (X \cup D \cup D')$  avec  $u \sim v$ . Montrer que  $D$  est reconfigurable en  $D'$  dans  $G$  si et seulement si  $D$  est reconfigurable en  $D'$  dans  $G - v$ .

**Question IV.7.** En déduire que si  $D$  et  $D'$  sont reconfigurables, alors il existe une transformation de longueur au plus  $f(k, t)$  entre  $D$  et  $D'$ . Expliciter la fonction  $f$  que vous obtenez. Montrer de plus qu'une telle transformation peut être trouvée en temps  $g(k, t) \cdot P(n)$ , où  $P$  est un polynôme dont le degré ne dépend pas de  $k$  ni de  $t$ .

## Partie V

Dans cette partie, on va colorer les **arêtes du graphe plutôt que les sommets**. Une  $k$ -**arête-coloration** d'un graphe  $G$  est une fonction  $\gamma : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  telle que, pour toute paires d'arêtes  $e, f$  ayant une extrémité commune, on a  $\gamma(e) \neq \gamma(f)$ .

Une telle coloration est dite **partielle** si elle n'est définie que sur un sous-ensemble de  $E(G)$ , la condition précédente  $\gamma(e) \neq \gamma(f)$  n'étant alors requise que lorsque  $\gamma(e)$  et  $\gamma(f)$  sont définies.

**Question V.1.** Montrer que tout graphe de degré maximum  $\Delta$  est  $(2\Delta - 1)$ -arête-colorable.

**Question V.2.** Montrer qu'aucun graphe de degré maximum  $\Delta$  ne peut être arête-coloré avec strictement moins de  $\Delta$  couleurs.

Dans la suite de cette partie, on veut améliorer la borne de la Question V.1 en prouvant que tout graphe de degré maximum  $\Delta$  peut être coloré avec au plus  $(\Delta + 1)$  couleurs.

Étant donnée une coloration (partielle) des arêtes de  $G$  et deux couleurs  $a \neq b$ , une **chaîne de Kempe**  $(a, b)$  est un ensemble maximal par inclusion d'arêtes colorées  $a$  ou  $b$  qui induit un sous-graphe connexe de  $G$ . Si  $u \in V(G)$ , un **échange de Kempe de**  $(a, b)$  **sur**  $u$  est l'opération consistant à échanger les couleurs  $a$  et  $b$  sur les arêtes de la chaîne de Kempe  $(a, b)$  contenant  $u$ . On peut facilement remarquer que les échanges de Kempe préservent les colorations partielles.

**Question V.3.** Montrer que chaque chaîne de Kempe induit un chemin ou un cycle de longueur paire.

Étant donnée une  $k$ -coloration partielle  $\gamma$ , on note  $\bar{\gamma}(v)$  l'ensemble des couleurs de  $\{1, \dots, k\}$  qui n'apparaissent pas sur les arêtes incidentes à  $v$ .

**Question V.4.** Soit  $G$  un graphe biparti,  $\gamma$  une coloration partielle des arêtes de  $G$  et  $uv$  deux sommets adjacents tels que  $a \in \bar{\gamma}(u)$  et  $b \in \bar{\gamma}(v)$ . Montrer que la chaîne de Kempe  $(a, b)$  contenant  $u$  ne peut pas contenir  $v$ .

**Question V.5.** Montrer que si  $G$  est un graphe biparti alors  $G$  est  $\Delta(G)$ -arête-colorable.

On fixe maintenant un graphe  $G$ , qu'on ne suppose **plus nécessairement biparti**, et un entier  $k$ .

**Question V.6.** Soit  $uv$  une arête non colorée d'une  $k$ -arête-coloration partielle  $\gamma$  de  $G$ . Soient  $a, b$  deux couleurs telles que  $a, b \in \bar{\gamma}(u)$  et  $b \in \bar{\gamma}(v)$ .

Montrer qu'il existe une coloration partielle  $\gamma'$  où les mêmes arêtes sont colorées telle que :

- $\bar{\gamma}'(u) = \bar{\gamma}(u)$ , et
- $a \in \bar{\gamma}'(v)$ , et
- $\bar{\gamma}'(w) = \bar{\gamma}(w)$  pour tout  $w \in V \setminus \{u, v\}$  sauf au plus un, qui vérifie alors  $(\bar{\gamma}'(w) \setminus \bar{\gamma}(w)) \cup (\bar{\gamma}(w) \setminus \bar{\gamma}'(w)) = \{a, b\}$ .

**Question V.7.** Soit  $\gamma$  une  $k$ -arête-coloration partielle de  $G$  où les arêtes non-colorées  $e_1, \dots, e_r$  sont toutes incidentes à un même sommet  $u$ . Pour tout  $i$ , on note  $e_i = uv_i$ .

On suppose que :

- $|\bar{\gamma}(u)| \geq r$ ,
- $|\bar{\gamma}(v_1) \cap \bar{\gamma}(u)| \geq 1$ , et
- pour tout  $i \geq 2$ ,  $|\bar{\gamma}(v_i) \cap \bar{\gamma}(u)| \geq 2$ .

Montrer  $G$  est  $k$ -arête-colorable.

**Question V.8.** Montrer que tout graphe de degré maximum  $\Delta$  est  $(\Delta + 1)$ -arête-colorable.

**Question V.9.** Montrer que pour tout  $\Delta > 1$ , il existe un graphe de degré maximum  $\Delta$  qui n'est pas  $\Delta$ -arête-colorable.