

Suites:

Exercice 1: Montrer par récurrence: $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall n \geq 0, a \in \mathbb{R}^+$

Correction: $P(n) = \{(1+a)^n \geq 1+na, \forall n \geq 0\}$

Montrons que $P(n)$ est vraie.

Initialisation: pour $n=0$, $(1+a)^0 = 1 = 1+0 \times a$

Hérédité: Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie également:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a + na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Ainsi, on a prouvé que $P(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion: par récurrence, on a prouvé que $\forall n \geq 0, (1+a)^n \geq 1+na$

Exercice 2: Étudier la monotonie de ces suites:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\underline{n!} = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$\forall n \geq 1, u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Correction:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{2^n n!}{(2n)!} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \times (2n+2)(2n+1) = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{1} \geq 1 \geq 0.$$

donc $u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \geq 0$. donc u_n est croissante.

$$\begin{aligned}
 \text{Q} \quad U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\
 &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} > 0
 \end{aligned}$$

donc $U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante.

- Exercice 3: Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \ln(n^2 + 2) - 2\ln(n)$
 $\forall n \geq 1$.
- 1) Montrer que (u_n) est bornée
 - 2) Étudier la monotonie de (u_n)
 - 3) En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite

Corrections 1) $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 2}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \ln(3)$
 donc (u_n) est bornée.

2) On note $f: \mathbb{R}_+^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$

$f'(x) = \frac{-4}{x(x^2 + 2)} < 0 \quad \forall x \geq 1$

Ainsi, f est décroissante $\forall x \geq 1$ donc u_n est ~~de~~ décroissante

3) u_n est bornée et décroissante ainsi elle converge.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 4: Soit (u_n) définie par $u_0 = 61$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,6u_n + 8$.

1) Résoudre $x = 0,6x + 8$. On notera r la solution de cette équation.

2) On considère la suite $(v_n) = (u_n - r)$

a) montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de la suite (v_n)

3) Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction: 1) $r = 20$

2) a) (suite géométrique: $u_n = \overset{\text{1er terme}}{u_0} \times \overset{\text{raison}}{r^n}$)
 $\begin{cases} u_{n+1} = 0,6u_n + 8 \\ r = 0,6r + 8 \end{cases} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{cases} u_{n+1} - r = 0,6(u_n - r) \end{cases}$ (ne pas confondre avec le r de l'é)

Ainsi, $v_{n+1} = u_{n+1} - r = 0,6v_n = (0,6)^{n+1} v_0$

la raison est $0,6$ et le premier terme $v_0 = u_0 - r = 61 - 20 = 41$.

b) $v_n = v_0 \times (0,6)^n = 41 \times (0,6)^n$

c) $0 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

3) $u_n = v_n + r = 20 + 41 \times (0,6)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 20$