

Nombres complexes

Exercice 1: Démontrer que $\forall (u, v) \in \mathbb{C}, |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Correction: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ donc on a:

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)(\overline{u+v}) + (u-v)(\overline{u-v}) \\ &= (u+v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u-v)(\bar{u} - \bar{v}) \\ &= u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u} - u\bar{v} - v\bar{u} + v\bar{v} \\ &= 2|u|^2 + 2|v|^2 \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2) \end{aligned}$$

Exercice 2: Écrire sous forme algébrique $z_0 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Correction: on a: $2\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})$

donc, $\frac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$.

Ainsi, $2\operatorname{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{(2+5i)(1+i)}{|1-i|^2}\right) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{-3+7i}{2}\right) = -3$

Exercice 3: Simplifier $z = ((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3}))^n + ((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3}))^n$

Correction: On a: $2 \operatorname{Re} \left(\left((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3}) \right)^n \right)$

on passe à l'exp() car c'est plus facile de manipuler des exposants avec des exp()

$$= 2 \operatorname{Re} \left((\sqrt{3} + i - 1 + i\sqrt{3})^n \right)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\left(2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) + 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^n \right)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\left(2 e^{i\frac{\pi}{6}} + 2 e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)^n \right)$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\left(2 e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\right)} \right) \right)^n \right)$$

on factorise par $e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)}$

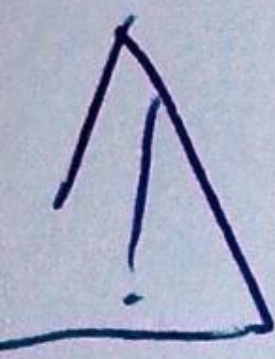
$$= 2 \operatorname{Re} \left(2^n \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \left(e^{i\frac{5\sqrt{3}}{12}} + e^{-i\frac{5\sqrt{3}}{12}} \right) \right)^n \right)$$

forme trigo

$$= 2 \operatorname{Re} \left(2^n e^{-in\frac{\pi}{4}} \left(2 \cos\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \right)^n \right)$$

$$= 2^{2n+1} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \times \cos^n\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)$$

$$= 2^{2n+1} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \times \cos^n\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)$$



Notez bien la méthode si vous avez $e^{ip} + e^{iq}$ pensez à factoriser par $e^{i\frac{(p+q)}{2}}$ ça débloque souvent!

Exercice 3: Déterminer et Représenter l'ensemble de points vérifiant
 $z + \bar{z} = |z|$

Correction: On pose $z = x + iy$ on comprends bien !

donc on obtient $2x = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $x \geq 0$ car $\sqrt{\quad}$ défini sur \mathbb{R}^+ .

$$\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \text{ ou } y = -\sqrt{3}x.$$

