

Etude de la fonction:

Exercice 1: On définit la tangente par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

1) Montrer que le domaine de la tangente est :

$$D = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$$

2) Vérifier que $\tan$ est impaire et périodique de période π .

3) Montrer que la tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et
 $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[: (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

4) Etudier les variations de $\tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

5) Dresser le tableau de variations. (limites etc.)

6) Représenter la courbe.

Correction: 1) $\cos$ est au dénominateur donc
il faut que $\cos \neq 0$.

Ainsi, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou encore $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2) $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$. Ainsi, la tangente
est impaire.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Ainsi, elle est périodique de période π . On peut ainsi
réduire notre étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

3) quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, le $\cos$ est au dénominateur et s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, ainsi, le domaine de dérivabilité ne change pas, et est $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2} = \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)}$$

$$u = \sin(u) \quad v = \cos(u)$$

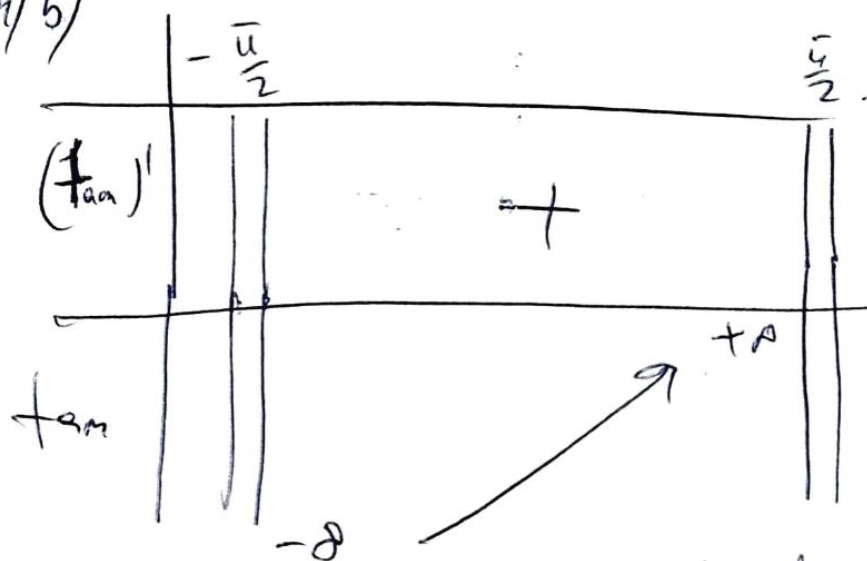
$$u' = +\cos(u) \quad v' = -\sin(u)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(u)}$$

ou encore $\frac{\cos^2(u)}{\cos^2(u)} + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}$

$$= 1 + \tan^2(u)$$

4/5)

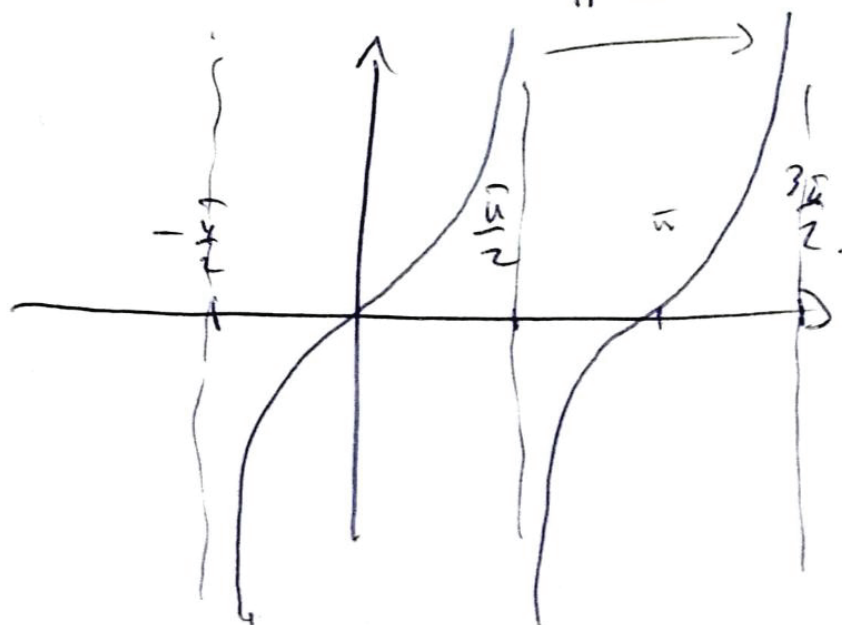


$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

translation de π .

6)



Exercice 2: Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{x}$.

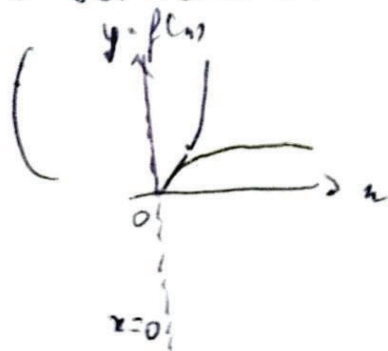
- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' .
- 2) Étudier $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
- 5) Tracer la courbe f .

Correction: 1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables: x^2 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

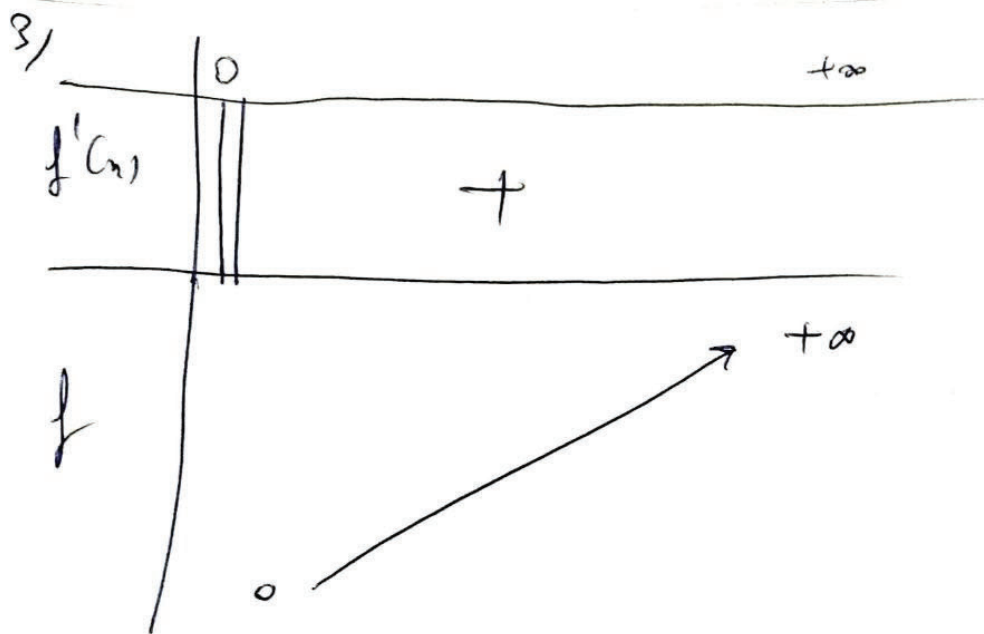
$$2) \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{2}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

On a une tangente verticale en 0 et une branche parabolique de direction (Oy)



branche parabolique
de direction (Oy)

branche parabolique
de direction (Ox)



4)

$$y = f'(x)(x-1) + f(1)$$

$$= \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

