SUITES NUMÉRIQUES

SUITES NUMÉRIQUES

* **On appelle une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ toute application u définie sur $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.**

$$u \quad : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto u(n)$$

On notera plutôt u ou $\color{red}{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ la suite u.

u_n désigne le n^{ème} terme et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite entière

* **Une suite peut être définie de 3 façons :**

Par une formule explicite en fonction de n:	Ex: $u_n = \frac{n+1}{n+2}$
Par une formule de récurrence :	u_0 *est connu* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ **Où** f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application **Ex: Fibonacci:** $F_0 = F_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Suite définie implicitement:	Ex: (E_n): $x^n - nx + 1 = 0$

Mister PREPA X

SUITES NUMÉRIQUES

* u est majorée ssi:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

* u est minorée ssi:

$$\exists\, m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M.$$

* u est bornée ssi:

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C.$$

Remarque: *une suite est bornée si est seulement si elle est majorée et minorée*

Mister PREPA X

SUITES NUMÉRIQUES

Définitions:

* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

Limites de suites:

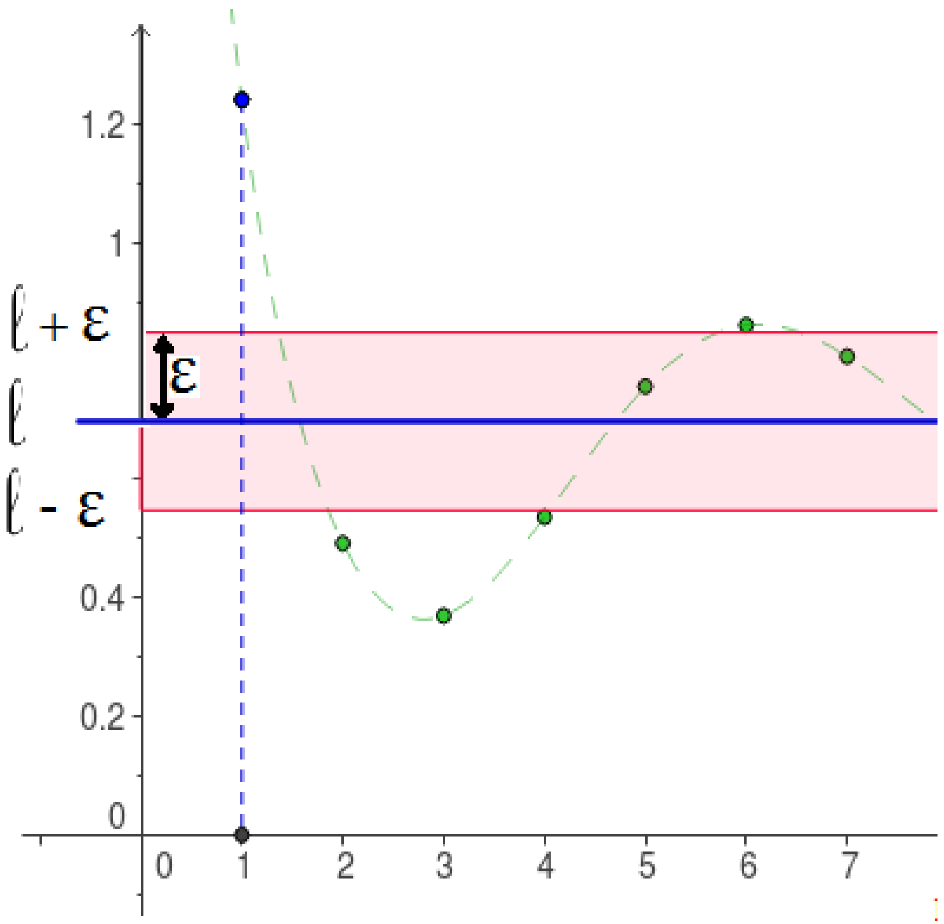
* **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que:**

* u est convergente ssi:

$\exists\, l \in \mathbb{R} : u \; converge \; vers \; l$.

$\exists\, l \in \mathbb{R}, \forall\varepsilon > 0$ et $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq \mathrm{N}$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$

on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$



SUITES NUMÉRIQUES

u converge vers l, si tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon\,;\, l+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$) contient toutes les valeurs de u_n apcr.	u diverge vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de u_n apcr.	u diverge vers $-\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs de u_n apcr.

$$\textit{Lorsqu'elle existe, la limite est unique !}$$

▪Propriété:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites admettant des limites réelles.

- **Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
- **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.**

▪ Opérations sur les limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites admettant des limites, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ un réel. On note:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert u_n\rvert = \lvert l\rvert$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda \cdot u_n) = \lambda . l$	$Si\ l' \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$	$Si\ l = 0^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

Mister PREPA X

SUITES NUMÉRIQUES

- **Théorème: Existence de la limite par comparaison, encadrement**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **des suites et** $l \in \mathbb{R}$.

$*$ **Si:** $\begin{cases} u \text{ et } w \text{ convergent vers } l \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$ **Alors** v **est convergente et** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \boldsymbol{l}$

$*$ **Si:** $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \end{cases}$ **Alors** v **est divergente et** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

- **Corollaire:**

$*$ **Si:** $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, |v_n - l| \leq u_n \end{cases}$ **Alors** v **est convergente et** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Mister PREPA X

▪ Théorème de la limite monotone:

Toute suite monotone admet une limite

- $*$ **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante et majorée alors elle converge:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$

- $*$ **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante et non majorée alors elle diverge vers** $+\infty$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- $*$ **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et minorée alors elle converge:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$

- $*$ **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et non minorée alors elle diverge vers** $-\infty$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

SUITES NUMÉRIQUES

Limites des suites de références

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0^+$
$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$
$Si\ k \geq 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$	$Si\ k \geq 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0^+$
$Si\ q > 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$	$Si\ 0 < q < 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0^+$

$Remarque\colon\ si\ q \leq -1, la\ suite\ (q^n) diverge\ et\ n'a\ pas\ de\ limites$

SUITES NUMÉRIQUES

■ Exercices

1) **Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :** $u_n = \frac{2n^2-n+1}{n^2+1}$

- **a)** **Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée**
- **b)** **Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**
- **c)** **En déduire que la suite est convergente et calculer sa limite**

2) **On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$**

- **a)** **Construire graphiquement u_0, u_1, u_2 *et* u_3. Donner une conjecture des variation de u et de sa limite.**
- **b)** **Montrer que la suite est bien définie, à valeurs strictement positives**
- **c)** **Montrer que la suite est croissante**
- **d)** **En supposant que la suite est majorée:**
  - **i)** **Montrer que la suite converge**
  - **ii)** **En déduire que la limite l de la suite doit être solution de l'équation $x = x + \frac{1}{x}$**
- **e)** **Montrer que la suite diverge vers $+\infty$**

Mister PREPA X