Nombres complexes

Mister
PREPA X

- $(x, y) \in R^2$, $forme\ d'un\ nb\ complexe : z = x + i * y\ avec\ i^2 = -1\ et \arg(i) = \pi/2$
- $z = z' \leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$
- $Conjugué : \overline{z} = \overline{x + i * y} = x - i * y$
- $Soient\ (z, z') \in C^2$:

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2 * i}$$

$$\overline{z * z'} = \overline{z} * \overline{z'}$$

$$avec\ z' \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Propriétés de calcul du module et de l'exponentielle imaginaire, φ ∈ R:

$$|z| = \sqrt{z * \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$$

$$|z * z'| = |z| * |z'|$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

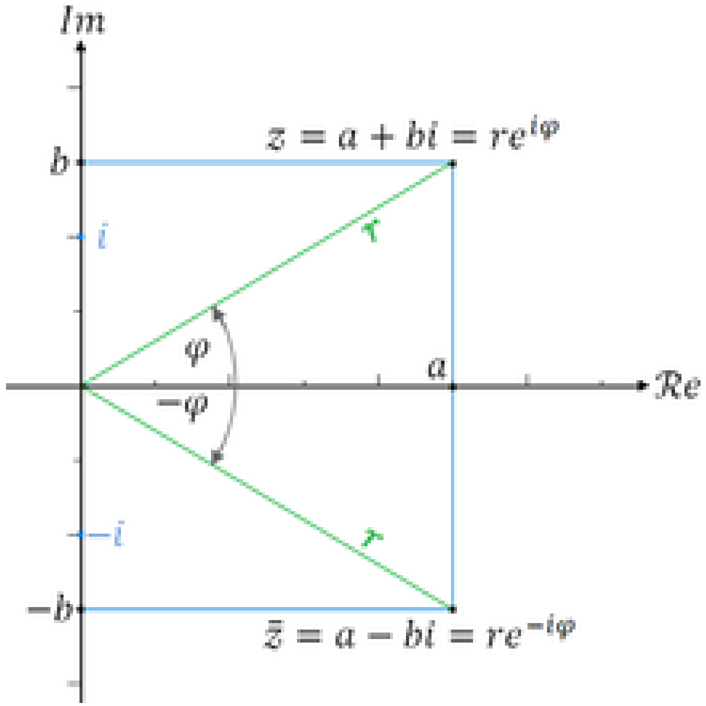
$$|z - z'| \geq \big||z| - |z'|\big|$$

$$e^{i*0} = 1$$

$$e^{i*(\varphi+\varphi')} = e^{i\varphi} * e^{i\varphi'}$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = \overline{e^{i\varphi}}$$

$$e^{i(\varphi-\varphi')} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi'}}$$



- $Formule\ d'Euler$: $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

- $Formules\ de\ Moivre$:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, n \in Z$$

$$(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))^{n} = \cos(n\varphi) + i * \sin(n\varphi)$$

- $Nouvelle$ écriture $du\ nombre\ complexe\ z$:

$$z = x + i * y = r * e^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$

$$avec\ r\ le\ module\ de\ z\ et\ \varphi = \arg(z)\ l'argument\ de\ z$$

$$z = z' \leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi\ avec\ k \in Z \end{cases}$$

$$\exists k \in Z\ tel\ que:\ arg(z) = arg(z') + 2k\pi \leftrightarrow arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$$

- Propriétés de l’argument :

$$\arg(z)\ avec\ z = 0\ n'existe\ pas\ !!!!!!!$$

$$\arg(z * z') \equiv \arg(z) + arg(z')[2\pi]$$

$$arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - arg(z')[2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n * \arg(z)[2\pi]$$

- *Comment déterminer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur ?*

$$z\ est\ réel \leftrightarrow Im(z) = 0 \leftrightarrow z = \overline{z} \leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$$

$$z\ est\ imaginaire\ pur \leftrightarrow Re(z) = 0 \leftrightarrow z = -\overline{z} \leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

- Quelques petits exercices :
- *Donner les représentations trigonométriques de* $z = 2\sqrt{3} + 2i$ *et*

$$z = 5/(1+i)$$

Les donner sous forme exponentielle

- *Soient* $u = -1 - i$ *et* $v = \sqrt{3} + i$, donner le module et l'argument de $u * v$ et $\frac{u}{v}$
- *Factoriser* $e^{ip} + e^{iq}$ *par* $e^{i(p+q)/2}$ *et trouver la forme exponentielle de* $z = 1 + e^{i\pi}$
- *Déterminer les entiers* n *tels que* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n$ *soit réel*

- Indices :

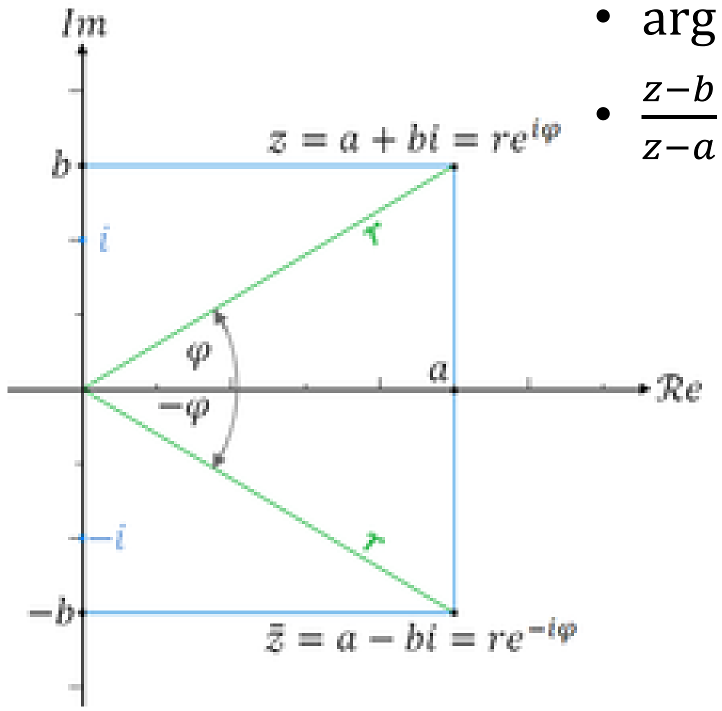
1. Calcul du module et de l’argument puis l’exponentielle vient toute seule
2. Voir le cours avec les règles de calculs des arguments et des modules
3. Voir le cours sur le calcul avec les exponentielles et 1=$e^{i2\pi}$!
4. Utilisez les méthodes de caractérisation du cours

• *Le plan complexe :*

- $|z| = \sqrt{z * \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$

Soient A et B, des points quelconques, d'affixes respectives a et b :

- $|z - a| = r \leftrightarrow M \in (A, r)$
- $|z - a| = |z - b| \leftrightarrow M$ *appartient à la médiatrice de* $[AB]$
- $\arg\left(\frac{z-a}{b-a}\right) \equiv 0[2\pi] \;\leftrightarrow$ M appartient à la demi − droite [AB) privé de A
- $\frac{z-b}{z-a} \in iR^* \leftrightarrow$ *M appartient au cercle de diamètre* $[AB]$ *privé de A et B*

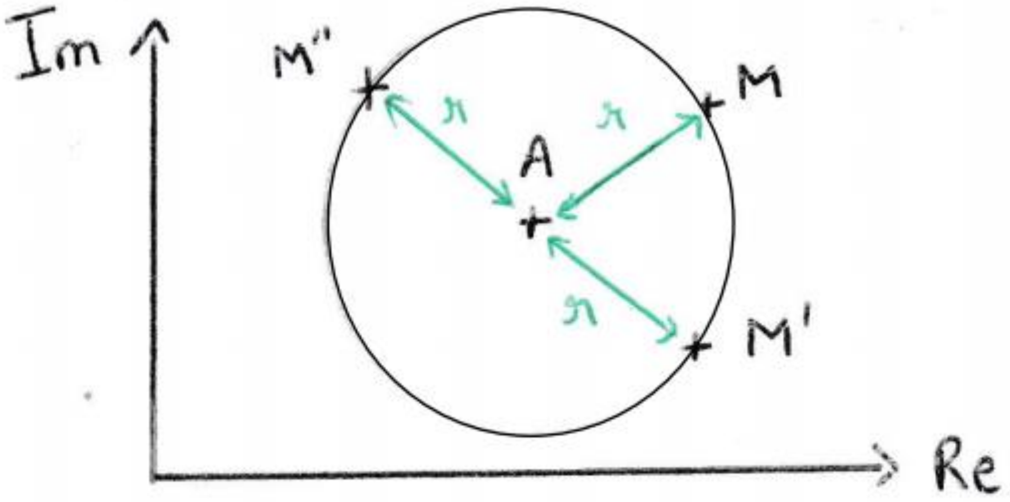


Si trois points ABC sont alignés quel est la condition sur l'argument ?

<u>Démo 1</u> : $|z-a| = r \iff AM = r$ ou $\|\overrightarrow{AM}\| = r$

$\iff$ M est à distance r de A

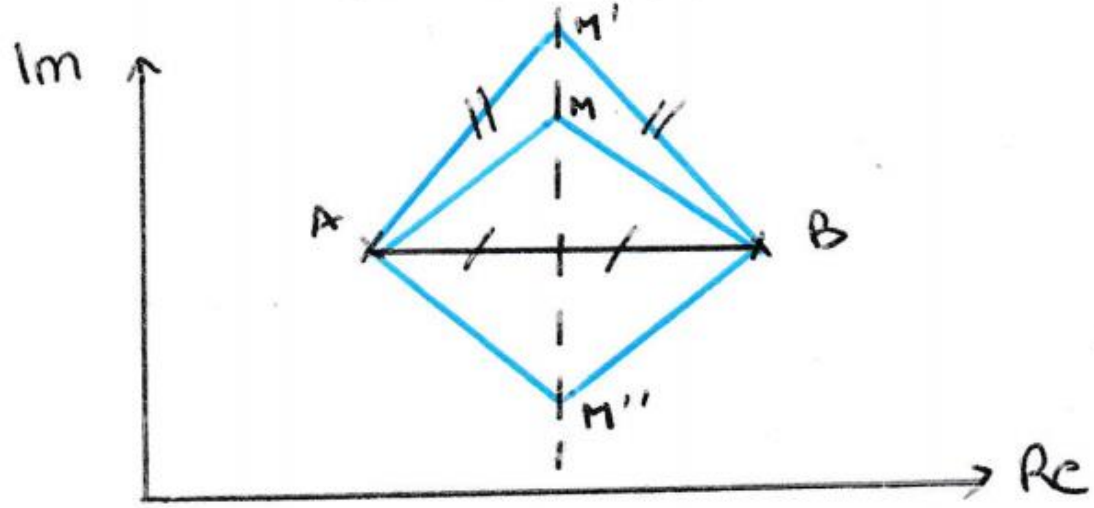
$\iff M \in \mathcal{C}(A, r)$



① Démo 2 : $|z-a| = |z-b| \iff AM = BM$

$\iff$ M est à égale distance de A et B

$\iff$ M appartient à la médiatrice [AB]



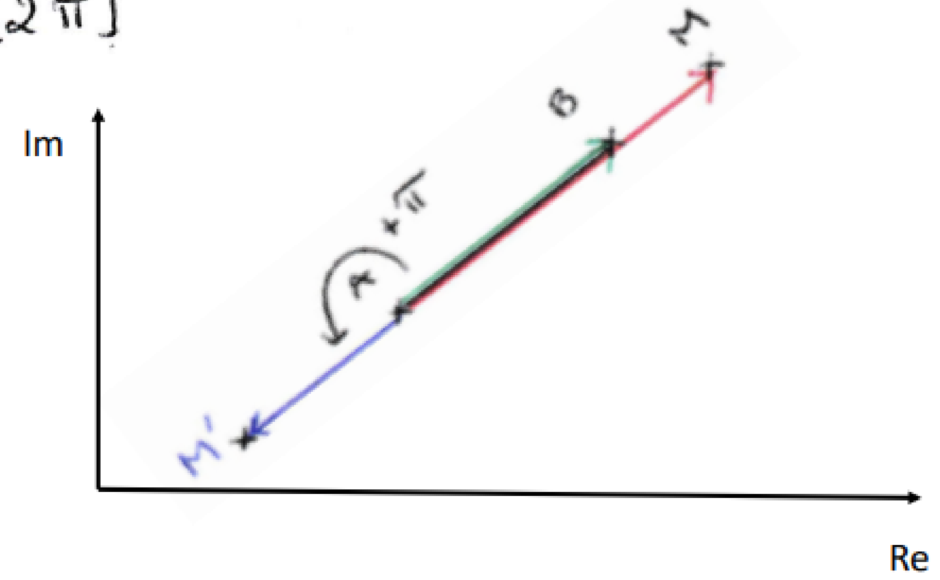
<u>Démo 3</u> : $M \in [AB)$ privé de A

$\iff \exists \lambda > 0 \; ; \; \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\iff \exists \lambda > 0$ tq $z - a = \lambda \, (b - a)$

$\iff \dfrac{z-a}{b-a} = \lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$\iff \arg\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right) \equiv 0 \; [2\pi]$



Démo 4 :

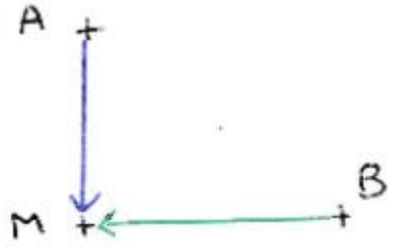
$\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}^* \iff M \in$ au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

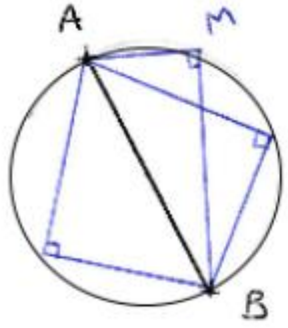
$\frac{z-b}{z-a}$ dans $i\mathbb{R}^* \iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

$\iff$ Triangle AMB est rectangle en M

$\iff M \in$ au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.





- Quelques petits exercices :
- $Déterminer\ l'ensemble\ des\ points\ d'affixe\ z\ suivants : |z-i| = |\bar{z}-1|$

$$et\ \arg(z+1) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

- Indices :

1. Dessinez !