LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

Mister
PREPA X

EXPONENTIELLE

- La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad f'(x) = f(x)$$

$$f(0) = 1$$

- Elle est définit de la sorte:

$$\begin{aligned} \exp \ : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

EXPONENTIELLE

- Règles de Calculs:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$: $$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{Z}$ $$e^{nx} = (e^x)^n$$

EXPONENTIELLE

- Tableau de variation + limites:

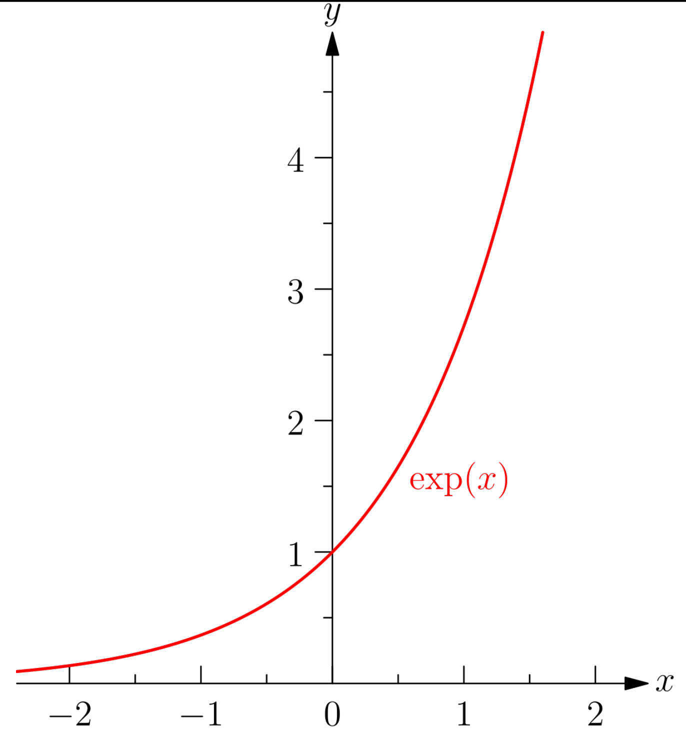
$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad e^x > 0$$

$$\exp \; est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}: \qquad (e^x)' = e^x$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
exp'(x)			+		
exp(x)	0	1		e	$+\infty$

$$\exp \; est\ strictement\ croissante:$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$$



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Mister PREPA X

LOGARITHME

- $\text{À } l'aide\ du\ corollaire\ du\ TVI, pour\ la\ fonction\ exp, strictement\ monotone,$ $on\ a\ le\ théorème\ suivant:$

  $\forall x > 0,\ l'équation\ \exp(t) = x\ admet\ une\ solution\ réelle\ unique\ qui\ vaut\ \ln(x):$

$$\begin{array}{rccl} \ln & : \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

- $D'\text{où}, par\ définition:$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: \qquad e^{\ln(x)} = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad \ln(e^x) = x$$

- $Les\ fonctions\ exponentielles\ et\ logarithmes\ sont\ dites$ $\color{red}{réciproques}$ $l'une\ de\ l'autre.$

LOGARITHME

- Règles de Calculs:

* $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$: $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

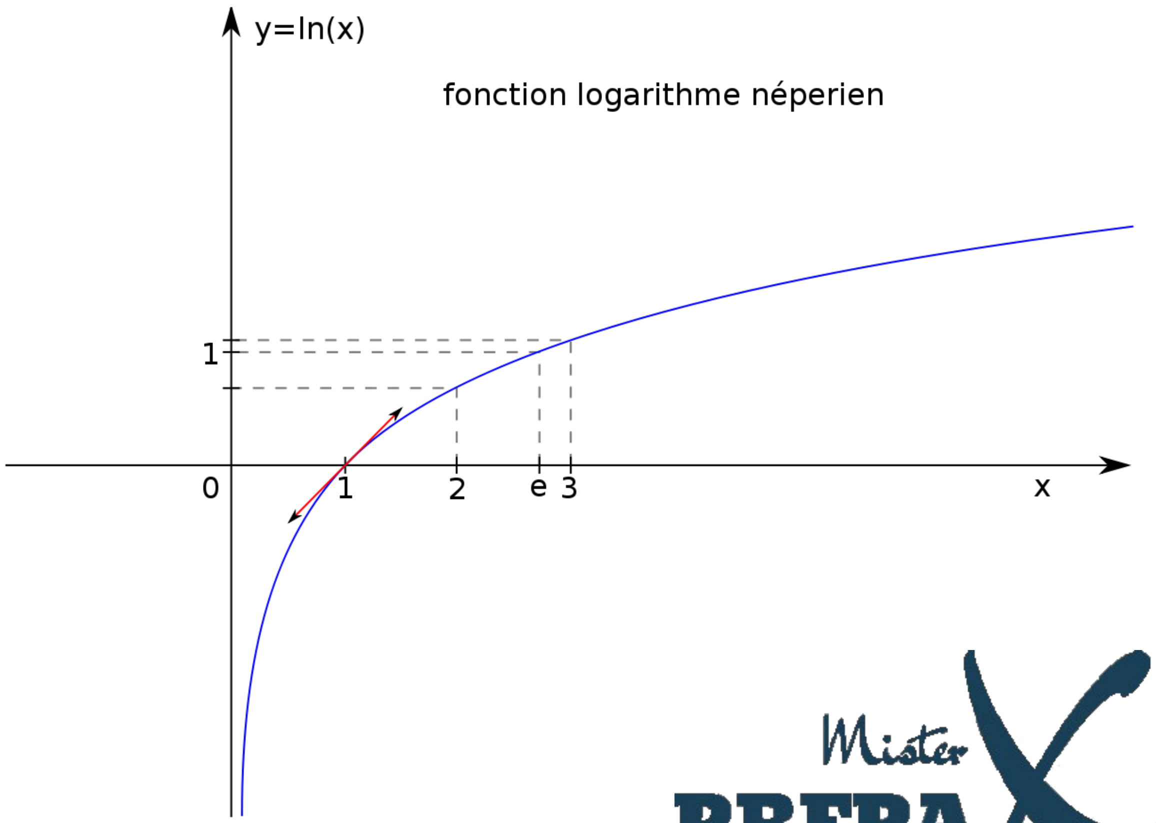
* $\forall(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\ln(x^n) = n\ln(x)$

* $\ln(1) = 0$

* $\ln(e) = 1$



Mister PREPA X

LOGARITHME

- Tableau de variation + limites:

$*\ \ln\ \textit{est dérivable sur}\ \mathbb{R}_+^*\ \textit{et}\ :$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ \ln(x)' = \frac{1}{x}$$

$*\ \ln\ \textit{est strictement croissante}:$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : \quad x < y \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(y)$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\|\|$			$+$			
$f(x) = \ln x$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

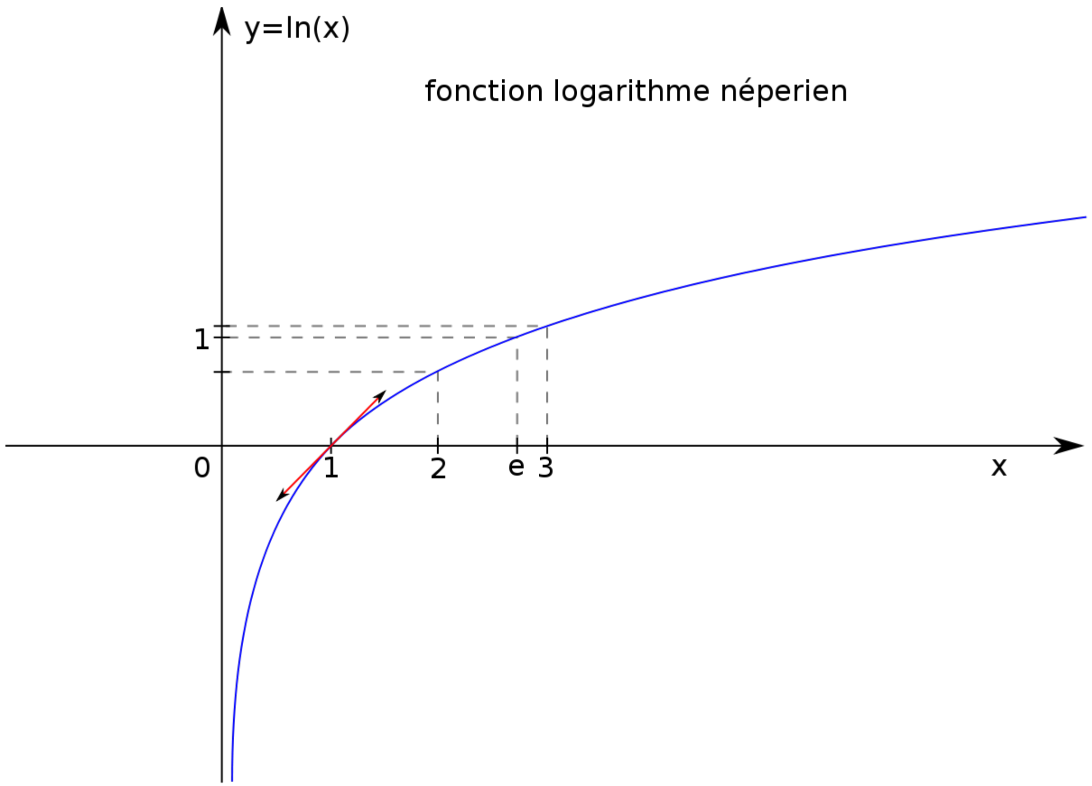
LOGARITHME

* Autres limites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



Exercices:

EXPONENTIELLE

1 ■ Étudier la limite de:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

2 ■ Étudier la fonction:

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$$

Tableau de variation/ limites/ asymptote …

LOGARITHME

3 ■ Étudier la limite de:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$$

4 ■ Résoudre

$$\ln\left(\frac{4x+2}{x-1}\right) = \ln(x^2)$$