Exp et Log.

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{2x} - 1}{x} \qquad x \mapsto xe^x - e^x + 1$$

1) Etudier le signe de $g(x)$

2) Etudier le signe de $f(x)$.

Correction : 1) $g'(x) = xe^x > 0$ et donc, g est croissante $\mathbb{R}_+^*$

et en plus, $g(0) = 0$ donc $g(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) $$f'(x) = \frac{2x e^{2x} - e^{2x} - 1}{x^2} = \frac{g(2x)}{x^2}$$

et $\begin{cases} g(2x) > 0, \ \forall x > 0 \\ x^2 > 0, \ \forall x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$

et $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$ (en faisant le chgt de variable $X = 2x$)

donc $f(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2e^{2x} - 3e^{x} - 2 + 3e^{-x} = 0$

Correction : $2e^{3x} - 3e^{2x} - 2e^{x} + 3 = 0$

On pose $X = e^{x}$

On a : $2X^3 - 3X^2 - 2X + 3 = 0$

On résout et on a le résultat suivant :

$S = \{ 0 , \ln(3) - \ln(2) \}$

$e^{x} = -1$ ça n'existe pas.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} e^{x} \times e^{y} = e^{5} \\ e^{x-y} = e^{2}. \end{cases}$

Correction : $\begin{cases} \ln(e^{x} e^{y}) = \ln(e^{5}) \\ \ln(e^{x-y}) = \ln(e^{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3{,}5 = \frac{7}{2} \\ y = 1{,}5 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ← on ne vous le souhaite pas :)

Exercice 4 : Etudier la limite : $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x - x^3$

Correction : $x^2 e^x - x^3 = x^3\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ car $\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ (croissance comparée)

Exercice 5 : Etudier la limite : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{2x^2 + 3e^{-x}}$

Correction : $\frac{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{2x^2\left(1 + \frac{3e^{-x}}{2x}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (croissance comparée).