Nombres complexes

Exercice 1 : Démontrer que $\forall (u,v) \in \mathbb{C}$, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Correction : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ donc on a :

$$\begin{aligned}
|u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) \\
&= u\bar{u} + \cancel{u\bar{v}} + \cancel{v\bar{u}} + v\bar{v} + u\bar{u} - \cancel{u\bar{v}} - \cancel{v\bar{u}} + v\bar{v} \\
&= 2|u|^2 + 2|v|^2 \\
&= 2(|u|^2 + |v|^2)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Ecrire sous forme algébrique $z_6 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

Correction : on a : $2\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})$

donc, $\dfrac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\dfrac{2+5i}{1-i}\right)} = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Ainsi, $2\mathrm{Re}\left(\dfrac{2+5i}{1-i}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{(2+5i)(1+i)}{|1-i|^2}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{-3+7i}{2}\right)$

$= -3$

Exercice 3 : Simplifier $z = ((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3}))^n + ((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3}))^n$

Correction : On a : $2\,\mathrm{Re}\left(\left((\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})\right)^n\right)$

on passe à l'exp() car c'est plus facile de manipuler des exposants avec des exp()

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{3}+i-1+i\sqrt{3}\right)^n\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}+2e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^n\right)$$

on factorise par $e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}}$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\left(2e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}\right)\right)^n\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(2^n\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\times\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}+e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)\right)^n\right)$$

forme trigo

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(2^n e^{-in\frac{\pi}{4}}\left(2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)^n\right)$$

$$= 2^{2n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\times\cos^n\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$= 2^{2n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\times\cos^n\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

⚠ Notez bien la méthode si vous avez $e^{ip}+e^{iq}$ pensez à factoriser par $e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}$ ça débloque souvent !

Exercice 3 : Déterminer et Représenter l'ensemble de points vérifiant

$z + \bar{z} = |z|$

Correction : On pose à la forme algébrique on comprends rien !

$z = x + iy$

donc on obtient $2x = \sqrt{x^2+y^2}$ donc $x \geq 0$ car $\sqrt{\ }$ défini sur $\mathbb{R}^+$.

$\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 3x^2$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}\,x$ ou $y = -\sqrt{3}\,x$.