Exercices : Équations

Exercice 1 : On a : $z^3 - (1+2i)z^2 + (1+2i)z - 2i = 0$ (E).

1/ Montrer que (E) a une solution imaginaire pure du type $z_0 = ia$ et déterminez-la.

2/ Déterminer le polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que $P(z) = (z - ia)Q(z)$.

3/ En déduire les solutions de (E)

Réponses : 1/ (E) a un solution du type $z_0 = ia$

$\Leftrightarrow z_0^3 - (1+2i)z_0^2 + (1+2i)z_0 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow (ia)^3 - (1+2i)(ia)^2 + (1+2i)ia - 2i = 0$

$\Leftrightarrow a = 2$ (après résolution du système d'équation après avoir séparé les parties réelles et imaginaires).

2/ Avec a, b, c non nuls on pose $Q(z) = az^2 + bz + c$.

On a : $z^3 - (1+2i)z^2 + (1+2i)z - 2i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$

Après développement, et identification, vous trouvez $Q(z) = z^2 - z + 1$

3/ Résoudre $Q(z)$ puis vous devez trouver que l'ensemble des solutions est : $\left\{ 2i ; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^3 + 5x^2 - 7x - 1 \geqslant 0$

$\boxed{1}$ 1 est racine évidente.

$\boxed{2}$ On développe et on identifie : $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 7x - 1$

$$= (x-1)(3x^2 + 8x + 1)$$

$\boxed{3}$ Tableau de signes : $P(x) = (x-1)\left(x + \left(\frac{-4-\sqrt{13}}{2}\right)\right)\left(x + \left(\frac{4-\sqrt{13}}{2}\right)\right)$

	$-\infty$	$\frac{-4-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-4+\sqrt{13}}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x + \frac{4+\sqrt{13}}{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x + \frac{4-\sqrt{13}}{2}$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

⚠ Ne perdez pas de temps à faire des tableaux à la règle.

Donc, $x \in \left[\frac{-4-\sqrt{13}}{2} ; \frac{-4+\sqrt{13}}{2}\right] \cup [1, +\infty[$.

Scanned by TapScanner

Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - 3m + 5 \geq 0$.

2 conditions nécéssaires et suffisantes : $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

1ère condition : $a = 1 > 0$ ok!

2ème condition : $\Delta = (3m+1)^2 - 4(1)(2m^2 - 3m + 5)$

$$= m^2 + 18m - 19$$

$$= (m+19)(m-1)$$

	$-\infty$		-19		1		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, $m \in \left]-\infty ; -19\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[$.