Exercice 1 :

Trigonométrie.

1) Trouver les valeurs de $\cos\left(\frac{18\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2) pour $\alpha = 480°$, trouver la valeur de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

3) Déterminer sachant $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(x) < 0$, la valeur de $\sin(x)$.

avec 2 méthodes au minimum.

Correction :

1) $\cos\left(\frac{18\pi}{3}\right) = \cos(6\pi) = \cos(2\pi) = 1$

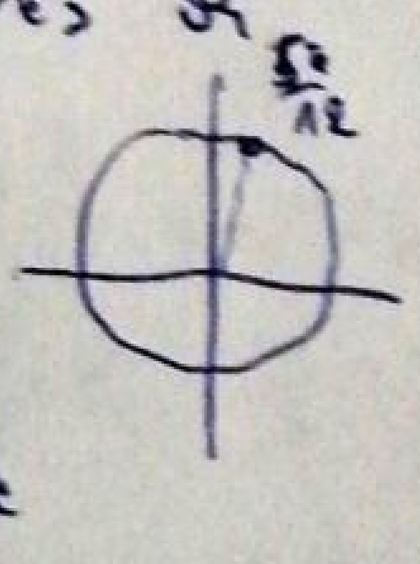
⚠ Propriété : x et $x + 2k\pi$ ont la même image à un tour près puisqu'il s'arrête au même endroit ils ont la même valeur de cos et sin.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

à tâtons on essaie de décomposer $\frac{5\pi}{12}$ en sachant à peu près où se trouve $\frac{5\pi}{12}$



(toujours le faire pour avoir une piste de décomposition).

2) $\alpha = 480° = 360° + 120° = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ donc $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \cos(\alpha)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\alpha).$$

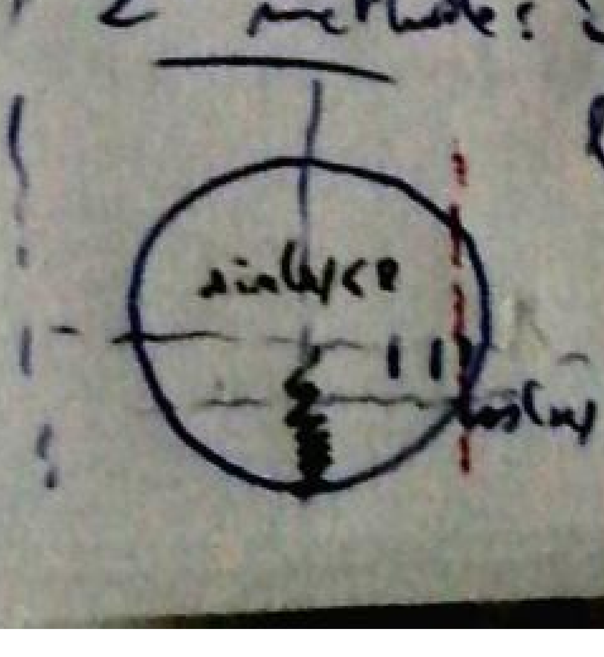
3) 1ère méthode : On sait : $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \iff \sin(x) = \pm \frac{1}{2}$

comme $\sin(x) < 0$

alors $\sin(x) = \frac{1}{2}$

2ème méthode : On dessine et on fait l'intersection et on trouve $\sin(x) = \frac{1}{2}$



Exercice 2 :

1/ Démontrer : $\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x) = 1$.

2/ Démontrer : $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$.

3/ Simplifier : $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(x+\pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(x - \frac{\pi}{2})$

4/ Simplifier : $(\cos(x) + \sin(x))^2 - (\cos(x) - \sin(x))^2$.

5/ Démontrer : $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$.

6/ Démontrer : $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 4\cos(\frac{x}{2})\cos(x)\cos(\frac{5x}{2}$

7/ Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.

Correction :

1) $\sin^4(x) = \sin^2(x)\sin^2(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{(1-\cos(2x))^2}{4} = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$ (1)

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \iff \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

$2\sin^2(x)\cos^2(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{2\sin^2(2x)}{4}$ (3) et $\cos^4(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{\cos^2(2x) + 2\cos(2x) + 1}{4}$. (2)

$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

On somme (1), (2), (3) et on a : $\frac{2\cos^2(2x) + 2 + 2\sin^2(2x)}{4} \underset{\uparrow}{=} \boxed{1}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) $(\cos(x) + \sin(x))^2 = \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $= \boxed{1 + 2\cos(x)\sin(x).}$

3) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = \sin(\pi + (\frac{\pi}{2} - x)) \underset{\uparrow}{=} -\sin(\frac{\pi}{2} - x) \underset{\uparrow}{=} \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$. (1)

$\sin(\pi + X) = -\sin(X)$ $\sin(-X) = -\sin(X)$

$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$. (2)

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ (3).

$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$ (4)

On somme (1), (2), (3), (4) :

$\boxed{3\cos(x) - \sin(x)}$

4/ $\cancel{\cos^2(x)} + 2\cos(x)\sin(x) + \cancel{\sin^2(x)} - \cancel{\cos^2(x)} + 2\cos(x)\sin(x) - \cancel{\sin^2(x)}$

$= 4\cos(x)\sin(x) = \boxed{2\sin(2x)}$

5) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \cos(x) - \sin(x)$

⚠ on utilise pas la méthode de factorisation, car on nous demande un sinus à la fin

$a\cos(x) + b\sin(x)$

6/ On utilise plusieurs fois $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

$\cos(x) + \cos(2x) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (1) avec $p = x$, $q = 2x$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

$\cos(3x) + \cos(4x) = 2\cos\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ (2) avec $p = 3x$, $q = 4x$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

On somme (1), (2) : $2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x}{2}\right)\right]$

$p = \frac{3x}{2}$, $q = \frac{7x}{2}$ (1) $= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[2 \times \cos\left(\frac{10x}{4}\right) \times \cos(x)\right]$

$= 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos(x)$

7) $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$; $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

On remplace et on calcul : $\frac{(\cos(2x)+1)(1-\cos(2x))}{4} = \frac{1^2 - \cos^2(2x)}{4}$

$= \frac{\sin^2(2x)}{4}$.