Exercices : Nombres réels

Exercice 1 : Calculer sans utiliser la calculatrice : Niveau : facile.

1) $\left(18-\frac{5}{3}\right)\times\left(13-\frac{27}{5}+26(15-36)-\frac{32}{5}\times\frac{42}{3}\right)$

2) $$\dfrac{\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}}{\dfrac{4-\frac{1}{3}}{93-\frac{5}{4}}}$$

Correction : /!\ On met tout au dénominateur pour s'occuper que du numérateur. On prend le plus grand dénominateur possible.

1) $$\frac{(18\times15-5\times5)(13\times15-27\times3+26(15-36)-32\times42)}{15}$$

$$=\frac{(270-25)\times(195-81+(-546)-1344)}{15}$$

$$=-29008$$

2) $$\left(\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}\right)\times\left(\dfrac{93-\frac{5}{4}}{4-\frac{1}{3}}\right)\overset{\text{chaque }+,-\text{ au même dénominateur}}{=}\left(\dfrac{-\frac{1}{5}}{\frac{13}{8}}\right)\times\left(\dfrac{\frac{367}{4}}{\frac{11}{3}}\right)$$

$$=-\frac{1}{5}\times\frac{8}{13}\times\frac{3}{11}\times\frac{367}{4}=-\frac{8808}{2860}$$

Scanned by TapScanner

Exercice 2 : Développer : 1) $(x+y+z)(xy+yz+zx)x^2$

2) $(x+y+z)^3(x+y)$.

3) Démontrer, à l'aide de $(x+y+z)^3$ et de 1/, que si $x+y+z=0$ alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Correction : 1) On ne s'occupe que des 2 premiers termes :

1) Calcul bête et méchant.

$$(x^2y+xyz+z^2x+xy^2+y^2z+xyz+xyz+yz^2+xz^2)x^2$$

$$=(x^4y+x^3yz+x^4z+x^3y^2+y^2zx^2+x^3yz+x^2yz+yz^2x^2+x^3z^2)$$

$$=(3x^2yz+x^4y+x^4z+x^3y^2+y^2zx^2+yz^2x^2+x^3z^2).$$

2) On ne s'occupe que du premier terme.

$$(x+y+z)^3=(x+y+z)(x+y+z)^2=(x+y+z)(x^2+2x(y+z)+(y+z)^2)$$

$$=(x+y+z)(x^2+2xy+2xz+y^2+2yz+z^2)$$

$$=(x^3+2x^2y+2x^2z+xy^2+2xyz+xz^2+yx^2+2xy^2+2xyz+$$
$$y^3+2y^2z+z^2y+zx^2+2xyz+2xz^2+y^2z+2yz^2+z^3)$$

$$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz.$$

Ne pas oublier de multiplier par $(x+y)$

$$x^4+y^3+z^3+3x^3y+3x^3z+3y^2x^2+3y^2zx+3z^2x^2+3z^2yx+6x^2yz$$
$$+x^3+y^4+z^3+3x^2y^2+3x^2zy+3y^3x+3y^3z+3z^2xy+3z^2y^2+6xy^2z$$
$$=x^4+y^4+x^3+y^3+2z^3+3x^3y+3x^3z+3y^3x+3y^3z+6x^2y^2+6x^2zy+6xy^2z$$
$$3y^2z^2+3z^2x^2+6xyz^2$$

3) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3x^2z-3x^2y-3y^2x-3y^2z-3z^2x-3z^2y-3xyz$

$\overset{\text{sans } z^2}{=}(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$

$=(x+y+z)[\cancel{(x+y+z)^2}\ 1-3(xy+yz+zx)]$

Si $x+y+z=0$ alors c'est $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$.

Scanned by TapScanner

Exercice 3 : 1) Simplifier : $\sqrt{(1-\sqrt{6})^2}$

2) Écrire sans dénominateur : $\dfrac{44}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Correction : 1) $\sqrt{(1-\sqrt{6})^2} = |1-\sqrt{6}| = \sqrt{6}-1$ Ne pas chercher midi - 14h....

2) $$\frac{44}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{44(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{44(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

Ultra - classique de simplifier en multipliant par l'inverse.

Id. remarquable

$$= \frac{44(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{4+4\sqrt{3}+3-5} = \frac{44(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+4\sqrt{3}} = \frac{22(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{1+2\sqrt{3}}.$$

$$= \frac{22(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-1+2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})(-1+2\sqrt{3})} = \frac{22(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-1+2\sqrt{3})}{12-1}$$

$$= 2(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-1+2\sqrt{3})$$

⚠ On a répondu à la question à cet étape.

Ne pas perdre de temps à développer.

⚠ On a fait 2 fois la même chose : multiplier haut et bas par le dénominateur et $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$.

Exercice 4 : 1) Montrer que $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$ avec $x+y=1$.

2) Montrer que : $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{n+1}{n^2}$

Correction : 1) $2(x^2+y^2) \geq 1$ ← on multiplie par 2.

et $1=(x+y)^2$, $2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2$.

$$x^2+y^2-2xy \geq 0.$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Donc inégalité vraie car quelque chose au carré est toujours positif.

2) ⚠ Ne surtout pas agir par récurrence (j'ai essayé c'est inutile et inextricable). La solution la plus simple est :

$+n^2$ $\Rightarrow 0 \leq k \leq n$

$$n^2 \leq n^2+k \leq n^2+n = n(n+1)$$

on fait l'inverse $\Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{k=0}^{n}$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{n^2} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{n}$$

⚠ $\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$ car il y a $(n+1) \times 1$

$= 1+1+\cdots+1$ $(n+1)$ fois !

Exercice 5 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x-7| = |3x+3|$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $\begin{cases} 7x+1 \geq 2x+4 \\ 4x+1 < 1 \\ x^2 \leq 3 \end{cases}$

<u>Correction</u> : 1) $|2x-7| = |3x+3|$

on élève au carré : pour enlever les valeurs absolues.

$\Rightarrow (2x-7)^2 = (3x+3)^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 28x + 49 = 9x^2 + 18x + 9$

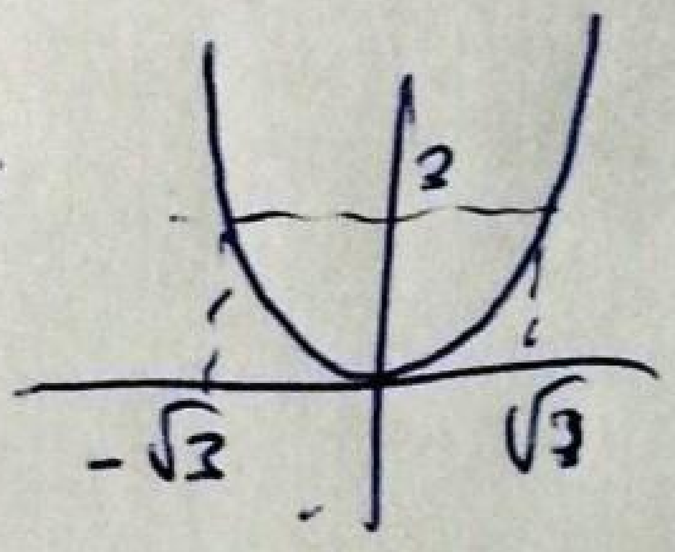
$\Rightarrow 5x^2 + 46x - 40 = 0$.

$\Delta = (46)^2 - 4(5)(-40) = 2916$.

$x_{1,2} = \dfrac{-46 \pm \sqrt{2916}}{10}$ donc $x_1 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

$x_2 = -\dfrac{100}{10} = -10$.

2) On les résout chacune : $x^2 \leq 3 \rightarrow$ graphe :



donc $x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ (1)

$4x+1 < 1 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ donc $x \in]-\infty;0[$ (2)

$7x+1 \geq 2x+4 \Leftrightarrow 5x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{5}$ (3)

Le système d'équation n'a pas de solution car il n'existe pas de correspondance entre (1), (2), (3).

(1) : bleu
(2) : rouge.
(3) : noir.