

ÉTUDE DE FONCTION

Continuité:

Définitions: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$

* f est dite **continue en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

* f est dite **continue sur I** lorsqu'elle l'est en tout point de I

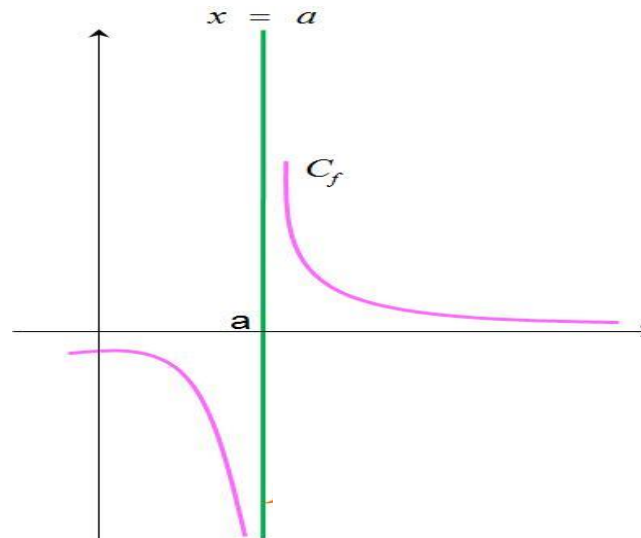
Limites:

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur l'intervalle I . Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- Si $a \in \mathbb{R}$ est une extrémité ouverte réelle de I :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, f est dite **prolongeable par continuité** au point d'abscisse a .

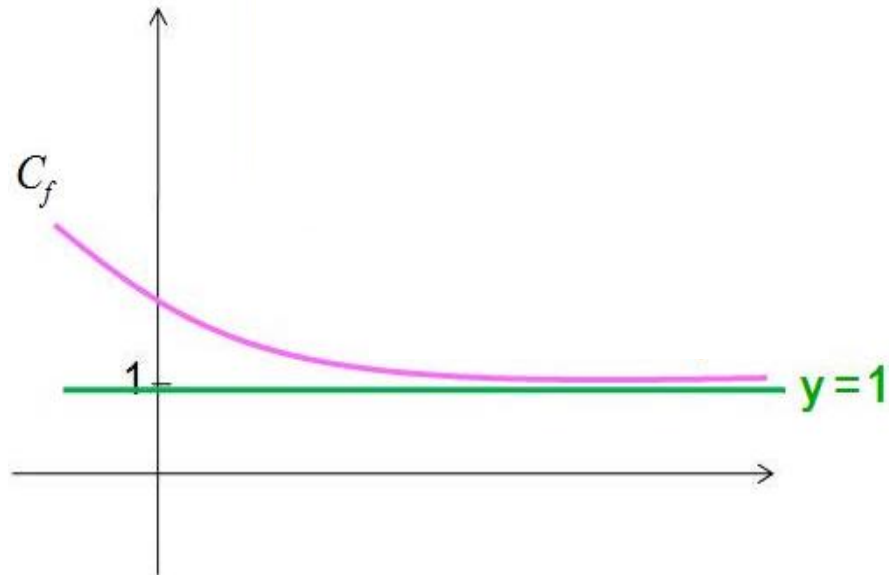
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** en a à \mathcal{C} ,
représentative de f



Limites:

- Si $\pm\infty$ est une extrémité ouverte de I :

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** en $\pm\infty$ à \mathcal{C} .



ÉTUDE D'UNE FONCTION

Fonctions monotones:

Un fonction est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Elle est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

* Une fonction est **croissante** sur I lorsque:

pour tous x_1 et $x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

* Une fonction est **décroissante** sur I lorsque:

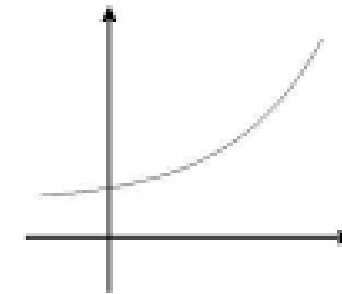
pour tous x_1 et $x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

* Une fonction est **strictement croissante** sur I lorsque:

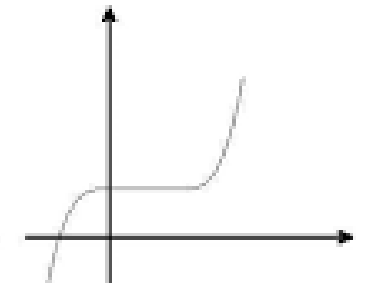
pour tous x_1 et $x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

* Une fonction est **strictement décroissante** sur I lorsque:

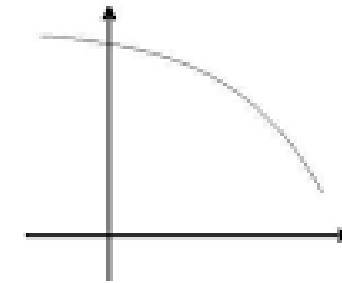
pour tous x_1 et $x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$



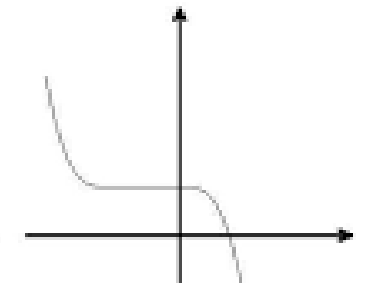
Fonction strictement croissante



Fonction croissante



Fonction strictement décroissante



Fonction décroissante

Théorème : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I

- f est croissante sur $I \leftrightarrow f' \geq 0$
- f est décroissante sur $I \leftrightarrow f' \leq 0$
- f est constante sur $I \leftrightarrow f' = 0$

Théorème :

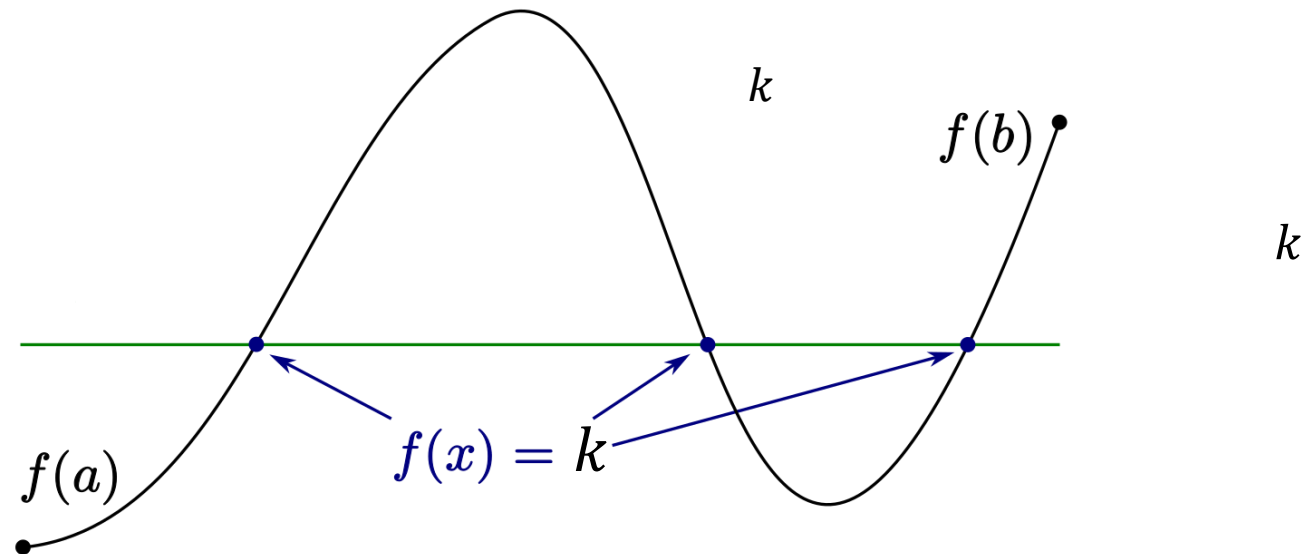
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I

- Si $f' > 0$ ALORS f est strictement croissante sur I
- Si $f' < 0$ ALORS f est strictement décroissante sur I

Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI):

Soit a et b des réels tels que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . Alors:

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a, b] : f(c) = k$$



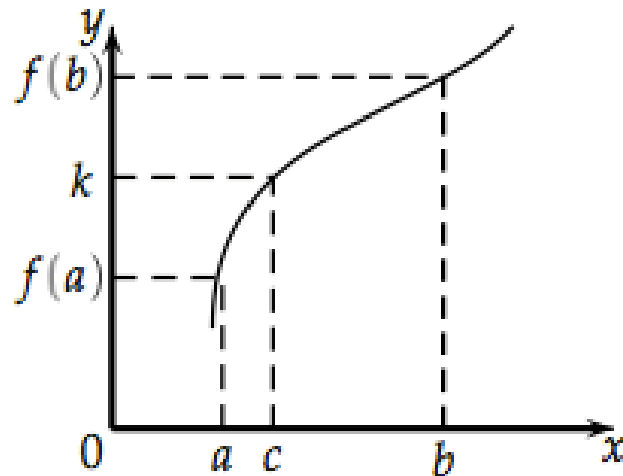
ÉTUDE D'UNE FONCTION

Corollaire

Soit a et b des réels tels que $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, strictement monotone et continue sur $[a, b]$.

alors:

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a, b] \text{ unique : } f(c) = k$$



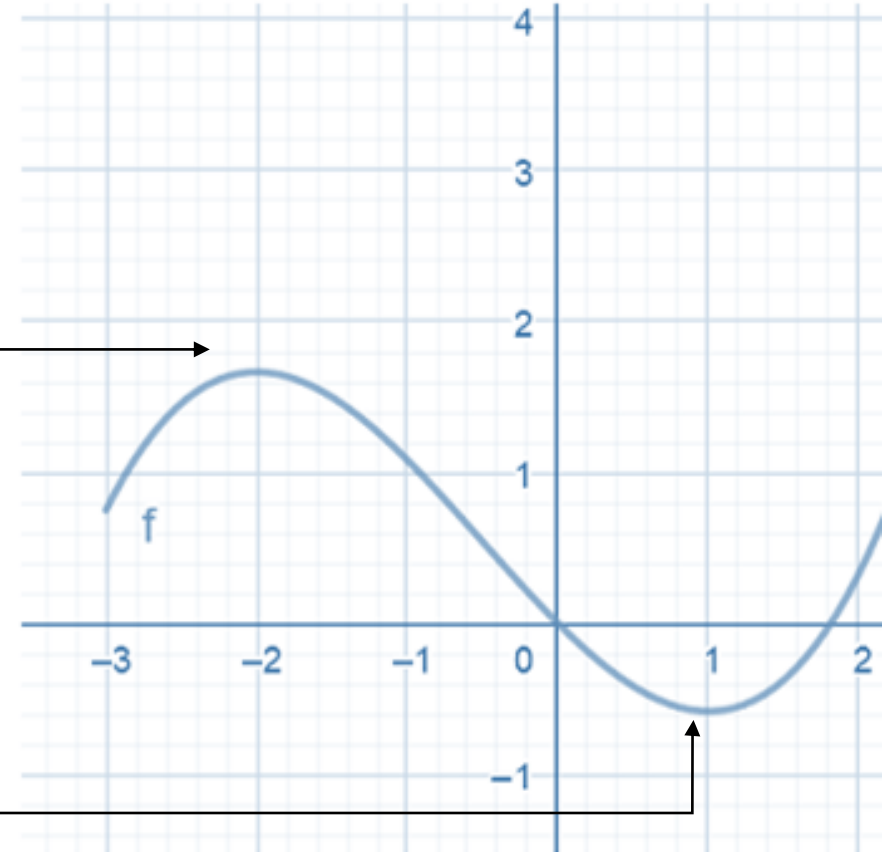
ÉTUDE D'UNE FONCTION

Extrema d'une fonction:

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

* Une fonction possède un **maximum** en $a \in I$
si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$

* Une fonction possède un **minimum** en $a \in I$
si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$



ÉTUDE D'UNE FONCTION

Extrema d'une fonction:

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ **et** $a \in I$

Si f **est croissante sur** $I \cap]-\infty, a[$ **et décroissante sur** $I \cap]a, +\infty[$
alors f **admet un maximum en** a .

Si f **est décroissante sur** $I \cap]-\infty, a[$ **et croissante sur** $I \cap]a, +\infty[$
alors f **admet un minimum en** a .

DÉRIVATION D'UNE FONCTION

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est dérivable au point a lorsque le taux de variation de f au point a possèdent une limite finie au point a .

En ce cas, $f'(a) = \lim_{\substack{x \neq a \\ x \rightarrow a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

s'appelle le **nombre dérivé** de f en a .

Théorème: Dérivabilité.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$

Si f est dérivable au point a , alors f est continue au point a .

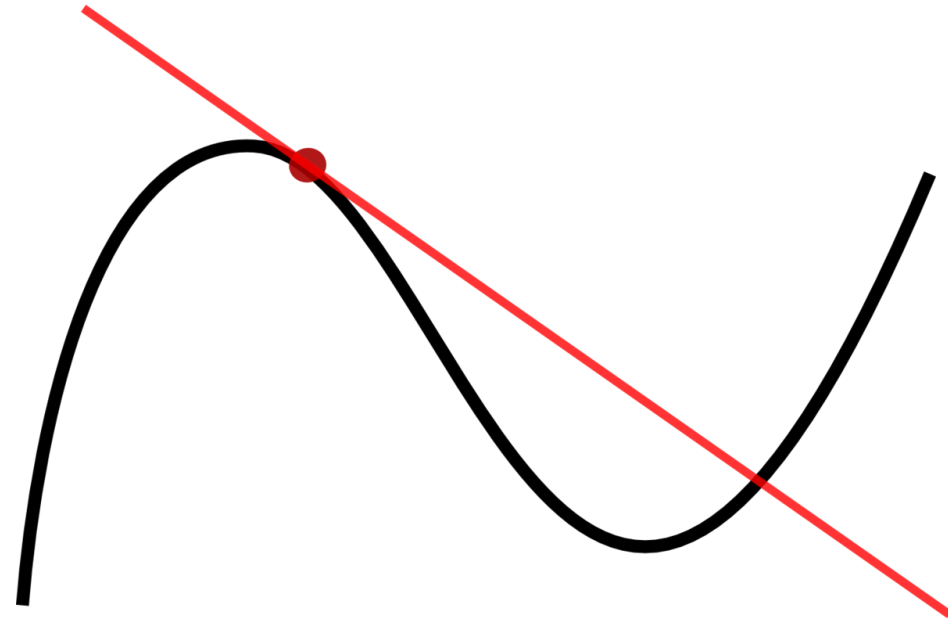


La réciproque est fausse !

DÉRIVATION D'UNE FONCTION

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point a , alors la droite d'équation réduite $y = m \cdot x + p$ est appelée la **droite tangente** à la courbe représentative de f au point $A(a, f(a))$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



DÉRIVATION D'UNE FONCTION

f est dite dérivable sur I , si elle est dérivable en tout point de I . La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est la fonction dérivée de f .

On la note $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$

DÉRIVATION D'UNE FONCTION

Opérations algébriques:

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que u et v sont dérivables dans I alors:

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Dérivation d'une fonction composée:

Soit $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \in I, u(x) \in J$.

On note alors $f \circ u$ la composée $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$.

On suppose que f est dérivable dans J et u dans I alors :

$f \circ u$ est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$(f(u(x)))'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$$

Dérivation d'ordre supérieur:

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On convient que f est 0 fois dérivable et que $f^{(0)} = f$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est n fois dérivable dans I si:

f est $n - 1$ fois dérivable dans I .

$f^{(n-1)}$ est dérivable dans I .

Dans ce cas, on note: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dérivées usuelles:

Fonction	Dérivée	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = k$ avec k constante	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R} si $\alpha \geq 0$ et \mathbb{R}^* si $\alpha < 0$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\left] \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

ÉTUDE D'UNE FONCTION

Dérivation de fonctions composées:

Fonction	Dérivée
$x \mapsto f(x)^n$	$x \mapsto n f'(x) f(x)^{n-1}$
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$	$x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$x \mapsto \ln(f(x))$	$x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$
$x \mapsto e^{f(x)}$	$x \mapsto f'(x) e^{f(x)}$
$x \mapsto \sin(f(x))$	$x \mapsto f'(x) \cos(f(x))$
$x \mapsto \cos(f(x))$	$x \mapsto -f'(x) \sin(f(x))$

$(k)' = 0$	$(x)' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(f^n)' = nf^{n-1} f'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin f)' = f' \cos f$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos f)' = -f' \sin f$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} f)' = \frac{f'}{\cos^2 f}$
$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{cotg} f)' = \frac{-f'}{\sin^2 f}$

$(e^x)' = e^x$	$(e^f)' = f' e^f$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^f)' = f' a^f \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a}$

ÉTUDE D'UNE FONCTION

■ Exercices

1) Soit f la fonction définie sur $I =]3, +\infty[$ par: $f(x) = \frac{x^2+7}{x-3}$

a) Donner le tableau de variation de f sur I

b) Quel est le minimum de f sur I , en quel point est il atteint ?

c) En déduire que pour tout $x > 3$, $f(x) \geq 14$

2) Soit $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x dans $[-1, 3]$ par: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

a) Montrer que f est dérivable et étudier ses variations sur $[-1, 3]$.

b) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α

c) Déterminer α à 10^{-3} près.